

Ciclos Económicos Reales y Crecimiento a Largo Plazo en Modelos con Acumulación de Capital Humano

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Tesis Doctoral

Autor: Antonio Ladrón de Guevara Martínez

Director: Manuel Santos Santos

1 de Febrero de 1997

Indice

Agradecimientos	ii
Capítulo 1	1
Capítulo 2	13
1. Introducción	13
2. Modelo General	16
3. Modelo sin Costes de Ajuste	22
3.1 Análisis Comparativo	29
3.2 Dinámica Global: Modelo con Ocio no Cualificado	34
3.3 Función de Utilidad Aditivamente Separable	43
3.4 Calibración del Modelo	48
4. Modelo con Costes de Ajuste	50
4.1 Calibración de la Función de Costes de Ajuste	56
5. Conclusiones	62
Figuras	64
Apéndice	81
Referencias	86
Capítulo 3	88
1. Introducción	88
2. Modelo General	92
3. El Modelo de Uzawa-Lucas	98
4. Ocio en la Función de Utilidad	104
5. Análisis de Resultados	107
Tablas	111
Figuras	112
Referencias	113

Agradecimiento

Agradezco muy especialmente a mi director de Tesis, Manuel Santos. A lo largo de estos años Manuel me ha permitido trabajar a su lado no solamente como estudiante de Doctorado, sino también como coautor en diversos proyectos de investigación. Desde nuestra primera conversación para bosquejar los posibles temas de interés, hace ya más de tres años, hasta ahora, han sido numerosos y valiosos los consejos y orientaciones sobre las direcciones a seguir en este trabajo.

Agradezco al Centro de Investigación Económica del Instituto Tecnológico Autónomo de México, donde tuve todo el apoyo material y humano necesario para culminar la última etapa del presente trabajo. Agradezco de igual manera al Departamento de Economía de la Universidad Carlos III de Madrid, y en especial a todos aquellos miembros del Departamento que a lo largo de estos años han participado activamente en el desarrollo del programa de Doctorado.

Capítulo uno

Introducción

En los últimos años la literatura de crecimiento económico ha cobrado relevancia tanto en el desarrollo teórico como en el estudio y contrastación de la evidencia empírica que ofrecen las crecientes fuentes de datos internacionales y regionales. Todo este proceso de desarrollo de las nuevas teorías de crecimiento tiene su punto de partida en el modelo de Solow (1956), a partir del cual se han ido considerando diversas generalizaciones que originen un comportamiento de la economía acorde con los hechos observados.

Como es bien sabido, la versión invariante en el tiempo -con rendimientos decrecientes en capital físico- del modelo neoclásico de un solo sector tiene implicaciones de estancamiento económico en el largo plazo. Es indispensable por tanto asumir una fuente exógena de incremento de la productividad que dé lugar a un crecimiento sostenido de la economía. De esta manera el stock de capital se acumula de manera continuada y permite un crecimiento de las demás variables en términos per cápita, como son la producción y el consumo. Sin embargo, el modelo ha sido incapaz de explicar las diferencias que de manera sostenida presentan los países. Las diversas economías han registrado durante largos períodos tasas de crecimiento radicalmente distintas, que van desde crecimiento negativo a milagros económicos como lo son los casos de Japón y Corea del Sur, que del 60 al 80 presentaron un crecimiento sostenido con medias anuales de 7.1% y 7.0% respectivamente [Véanse ejemplos citados por Lucas (1988) y Mulligan y Sala-i-Martin (1993)].

Es razonable pensar entonces que el proceso de crecimiento de la productividad sea el resultado de decisiones tomadas por los agentes de la economía. Las nuevas teorías [véase Jones y Manuelli (1994) para una discusión detallada al respecto] se han centrado en endogenizar este proceso de incremento de la productividad del factor trabajo. Esta ha sido la fuente de inspiración de los nuevos modelos llamados de "crecimiento endógeno",

los cuales presentan este crecimiento sostenido a una tasa determinada por las decisiones de inversión en el desarrollo o mejora de productos, nuevas tecnologías o conocimientos. Cualquiera de estas consideraciones permite desarrollar modelos que presenten un crecimiento de largo plazo de la producción a tasas endógenamente determinadas

La aportación de esta tesis radica en el desarrollo de diversas extensiones del conocido modelo de crecimiento endógeno con capital humano, desarrollado por Uzawa (1965) y retomado por Lucas (1988). Una primera generalización considera asignaciones de ocio como un tercer uso del tiempo con una formulación que permite considerar distintos grados de cualificación del mismo. Adicionalmente se incluyen costes de ajuste sobre la inversión en capital físico. Ambas extensiones implican cambios cualitativos relevantes en la dinámica del modelo, originados por las no concavidades a las que dan lugar las nuevas formulaciones. La segunda generalización desarrolla diversas extensiones del modelo de Uzawa-Lucas en contexto estocástico. Las implicaciones y los resultados obtenidos replican de manera general el comportamiento de los datos y reproducen las volatilidades y correlaciones de las variables relativas al mercado de trabajo, principal limitación del modelo estándar de Ciclos Económicos Reales (CER).

En el modelo de Uzawa-Lucas una fracción de la dotación de tiempo disponible se asigna al trabajo, como factor de producción del bien físico, el cual se puede consumir o invertir para incrementar el stock de capital físico. La fracción de tiempo restante se asigna al estudio. De esta manera los agentes incrementan su stock de conocimientos, denominado en esta literatura como capital humano, logrando mejorar la productividad de las horas trabajadas. Este modelo satisface un requisito indispensable para que se presente crecimiento sostenido en el largo plazo: el producto marginal de algún factor acumulable debe estar acotado inferiormente por un valor estrictamente positivo. De esta manera en el estado estacionario los dos factores de producción: capital físico y unidades eficientes de trabajo (horas de trabajo agregadas ponderadas por el stock de capital humano) se acumulan a tasas constantes, y las economías crecen de manera sostenida, impulsadas por la acumulación continua de ambos capitales. En el estado de largo plazo de estas economías

los usos del tiempo permanecen constantes y las variables en términos per cápita presentan un crecimiento sostenido, por lo que se converge a proporciones constantes entre el consumo y los capitales físico y humano. En el modelo de Uzawa-Lucas sin externalidades la solución óptima se determina a través de la resolución de un problema cóncavo de optimización, por lo que, bajo condiciones estándar, el modelo presenta un único rayo de crecimiento equilibrado globalmente estable. A partir de este segundo estudio se han desarrollado numerosos artículos que analizan la dinámica del mismo [véase Caballé y Santos(1993), Chamley (1993) y Faig (1992)].

Las distintas extensiones del modelo se han centrado en dos áreas. La primera, incluida en el modelo de Lucas (1988), considera externalidades positivas del capital humano sobre la producción del bien físico. Tomando como punto de partida este trabajo, se ha desarrollado una extensa literatura al respecto [véase Jones y Manuelli (1994) para una discusión detallada de esta literatura]. Estas consideraciones dan lugar a equilibrios subóptimos, así como a la posibilidad de múltiples equilibrios, dada la posible indeterminación de los mismos [véase por ejemplo Benhabib y Perli (1994)].

El segundo tipo de extensiones generaliza tanto las funciones de producción como las funciones de utilidad, sin consideraciones de externalidades. Bond, Wang y Yip (1996) y Caballé y Santos (1993), entre otros, estudian formulaciones del modelo que incluyen al capital físico como factor de producción en el segundo sector y analizan los efectos de las intensidades de los factores en ambos sectores sobre la dinámica de transición. Lucas (1990) desarrolla una extensión considerando ocio no cualificado en la función de utilidad. Al respecto, Ladrón de Guevara, Ortigueira y Santos (1995) caracterizan la dinámica del modelo y determinan las condiciones de multiplicidad de estados estacionarios. Ortigueira (1995) estudia una extensión incluyendo ocio cualificado. Dicha formulación origina un problema cóncavo que, bajo condiciones estándar, da lugar a una única senda de crecimiento equilibrado globalmente estable.

Tomando como punto de partida el modelo de Lucas (1990) esta tesis desarrolla di-

versas generalizaciones en contextos tanto determinístico como estocástico, tendientes a analizar la dinámica de transición y contrastarla con la evidencia empírica en términos de corto y largo plazo (análisis de CER y convergencia entre países respectivamente). A continuación presentamos en detalle cada una de las extensiones estudiadas en los dos siguientes capítulos, y analizamos los principales resultados obtenidos y las aportaciones a la literatura pertinente.

El **segundo capítulo** de esta tesis desarrolla dos extensiones, en contexto determinístico y tiempo continuo, del modelo de Uzawa-Lucas. En primer lugar se generaliza la función de utilidad, considerando unidades eficientes de ocio. El modelo de Uzawa-Lucas supone que los agentes reparten una dotación fija de tiempo a los dos sectores, por lo que de manera implícita asume que las asignaciones de tiempo al ocio se mantienen constantes. Incluir el ocio como un tercer uso del tiempo disponible permite endogenizar el tiempo de asignación a las actividades productivas. Los agentes asignan ahora su dotación de tiempo a tres actividades: ocio, trabajo y estudio. De esta manera, el tiempo destinado a ambos sectores productivos es ahora una variable endógena. La segunda extensión considera costes de ajuste sobre la inversión en el sector de capital físico.

En la primera extensión se incluye una formulación en la que los agentes derivan utilidad del consumo del único bien agregado en la economía y de las unidades eficientes de ocio. Siguiendo el enfoque del trabajo de G. Becker (1965) asumimos que el nivel de educación de los agentes afecta la utilidad marginal del ocio, por lo que las personas más educadas obtienen un mayor grado de utilidad, dada una misma asignación de ocio. Sin embargo, hasta la fecha no se conocen estudios empíricos que estimen este grado de cualificación del ocio. Para modelizar de una manera general dicho supuesto se definen las unidades eficientes de ocio. En el segundo argumento de la función de utilidad se pondera la asignación de tiempo al disfrute del ocio por un índice del nivel de capital humano. El parámetro que pondera el stock de capital humano determina el grado de cualificación del ocio.

Hasta la fecha se han considerado dos formulaciones extremas que consideran ocio en la función de utilidad. Lucas (1990) considera una formulación en la que el nivel de capital humano de los agentes no afecta la utilidad marginal del tiempo de ocio. La consideración de ocio no cualificado en la función de utilidad es una importante fuente de no concavidades en el modelo. Ladrón de Guevara *et al.* (1995), estudian la dinámica, demostrando que aún sin consideraciones de externalidades y con valores de los parámetros relativamente estándar el modelo puede generar múltiples sendas de crecimiento equilibrado. El problema no es globalmente cóncavo, ya que el capital humano afecta de manera asimétrica al tiempo asignado a las distintas actividades, y requiere por tanto de un método distinto para la caracterización de las soluciones óptimas. La dinámica de este modelo se complica ante la multiplicidad de sendas de crecimiento equilibrado. Cuando la economía presenta multiplicidad de estados estacionarios, dependiendo de la proporción inicial de capital físico a capital humano los agentes escogen sendas de transición que convergen a un estado estacionario con alto crecimiento y una proporción elevada de capital humano, o bien sendas que convergen a un estado no interior de mayores niveles de consumo y ocio pero sin inversión en el segundo sector, y por tanto sin crecimiento de largo plazo.

En el otro trabajo que ha considerado ocio en la función de utilidad, Ortigueira (1995) desarrolla un modelo con el máximo grado de cualificación del ocio, en el que el capital humano entra simétricamente con el tiempo de ocio como argumento en la función de utilidad, obteniendo un modelo cóncavo, con un comportamiento estándar en esta literatura. El modelo presenta a lo sumo un único estado estacionario globalmente estable.

La formulación más general, desarrollada en el capítulo dos, permite un grado arbitrario de ponderación del nivel educativo en las unidades eficientes de ocio, que son ahora producto del tiempo asignado a esta actividad por un índice del nivel de capital humano. Con esta formulación se permiten diversos grados de cualificación del ocio. El modelo presenta distintas posibles dinámicas, dependiendo de los valores de los parámetros. En el capítulo se determinan las condiciones bajo las cuales se presenta cada una de las mismas.

Para que el modelo presente crecimiento sostenido la productividad en sector educativo debe ser superior a una cota determinada por los demás parámetros del modelo. En caso contrario el modelo presenta una dinámica que converge globalmente a un único estado sin inversión en capital humano. Si por el contrario, la productividad en el segundo sector es lo suficientemente alta el modelo presenta sendas de crecimiento equilibrado interiores, en las que las asignaciones de tiempo a las tres actividades son estrictamente positivas. Para cualquier valor del parámetro de cualificación del ocio el modelo presenta, al igual que en el modelo de Lucas (1990), un subespacio de los demás parámetros para el cual se presentan múltiples estados estacionarios. Este resultado de multiplicidad es por tanto robusto para cualquier grado de cualificación del ocio estrictamente inferior a uno, ya que en caso contrario la formulación del modelo es cóncava. A pesar de que con cualquier grado de cualificación se pueden presentar múltiples estados estacionarios, el modelo se calibró apropiadamente para distintos grados entre cero y uno, obteniéndose en cualquier caso un único estado estacionario interior globalmente estable con crecimiento sostenido.

La otra generalización del modelo de Uzawa-Lucas incluye costes de ajuste en la inversión de capital físico. Aún cuando se consideren costes de ajuste en este sector, la versión del modelo con ocio cualificado presenta un único estado estacionario interior. Se estudia la dinámica global del modelo y se calibra para reproducir, entre otros hechos estilizados, los mismos valores de la q de Tobin estimados en la literatura empírica. El modelo, a diferencia de los modelos de crecimiento sin costes de ajuste, presenta una velocidad de convergencia que reproduce el comportamiento de las bases de datos internacionales.

En los diversos estudios empíricos las tasas estimadas de convergencia condicionada entre países oscilan entre el 0.6% y el 2.4% [véanse por ejemplo los resultados de las regresiones realizadas por Barro y Sala-i-Martin (1992) y Mankiw, Romer y Weil (1992)]. Cuando se realizan simulaciones con parámetros relativamente estándar en la literatura los modelos de dos sectores presentan limitaciones similares a las del modelo de Solow para reproducir estas velocidades de convergencia registradas. Para diversos valores de

los parámetros y diversas formulaciones del modelo la tasa de convergencia se mantiene entre un 19% y 30%. Resultados similares se obtienen con el modelo neoclásico [véase Ortigueira y Santos (1994) para un análisis detallado de este tema]. Con tasas de un 19% a un 30% es imposible replicar economías con períodos de 20 años creciendo a tasas distintas de las de estado estacionario. El proceso de convergencia es demasiado rápido, y las economías alcanzan en pocos años tasas muy cercanas a las de crecimiento equilibrado. Estas tasas de convergencia implican una vida media de entre 2.3 y 3.6 años (tiempo en alcanzar el punto medio entre el estado actual y el estacionario).

En la extensión del modelo con costes de ajuste sobre la inversión en capital físico la dinámica de transición del modelo varía drásticamente, al punto de que al calibrar el proceso de acumulación de capital físico la velocidad de convergencia del modelo se reduce del 24% al 3.6%. La vida media se incrementa de 2.8 años a 19.3 años, y por tanto el proceso de convergencia se vuelve significativamente más lento, permitiendo períodos de crecimiento sostenido a lo largo de 20 años a tasas distintas de las de crecimiento equilibrado. Ante una pérdida significativa de capital físico la economía puede crecer de manera sostenida a estas tasas por largos períodos de 10 a 20 años. Sin embargo, el modelo no puede reproducir los milagros económicos vividos por Japón y Corea del Sur de los 60 a los 80 con crecimientos superiores a un 7% anual. Consideraciones adicionales de costes de ajuste sobre el proceso de acumulación en el segundo sector podrían mejorar el comportamiento del modelo en este sentido. Debemos precisar que la calibración de la función de costes de ajuste sobre la inversión en capital humano puede ser difícil de realizar debido a la conocida escasa disponibilidad de datos fiables en cuanto al stock de capital humano y la inversión en este sector. No obstante, el ejercicio teórico puede ser interesante para comprender los efectos que los costes de ajuste sobre la inversión en educación tienen en la dinámica de transición.

En el **tercer capítulo** del presente trabajo se desarrollan distintas versiones estocásticas del modelo de crecimiento endógeno con capital humano y se analizan las aportaciones de estos desarrollos para explicar las volatilidades y correlaciones en el mer-

cado de trabajo. Un marco más general que incluye tres usos del tiempo y dos sectores ofrece aportaciones para explicar los hechos observados en el mercado de trabajo, los cuales no han podido ser reproducidos por el modelo estándar de CER. La versión más general del modelo, incluyendo ocio en la función de utilidad y shocks tecnológicos en ambos sectores logra reproducir de manera general el comportamiento de los datos, tanto en las volatilidades relativas como en las correlaciones presentadas entre las distintas variables.

Como es bien sabido, en el modelo de un solo sector, las variaciones en la productividad desplazan la demanda de trabajo ante una oferta de trabajo básicamente estable. Como consecuencia, el modelo predice una correlación alta y positiva entre las horas trabajadas y los salarios. Sin embargo, de acuerdo con evidencia empírica, las horas trabajadas y los salarios están incorrelados. Al respecto, numerosas extensiones se han desarrollado para mejorar el comportamiento del mercado de trabajo. Las consideraciones de un segundo sector, como han sido incluir sector público o sector de producción de los hogares, con una segunda fuente de perturbaciones, logran desplazamientos de la oferta de trabajo con la consecuente reducción en las correlaciones horas-productividad [véanse Ambler y Parquet (1992), Boldrin y Horvath (1995), Christiano y Eichenbaum (1992) y Hansen y Wright (1992) para discusiones detalladas al respecto].

Como es de esperar, en el modelo de CER con capital humano el estudio registra un comportamiento anticíclico, incentivándose en los períodos recesivos como consecuencia de la disminución de los costes de oportunidad de invertir en capital humano. La interacción entre los dos sectores incrementa el grado de sustituibilidad de los usos del tiempo y el modelo presenta sustitución intersectorial, dependiendo de las productividades relativas de los tiempos de trabajo y estudio. Como consecuencia la volatilidad general del modelo es muy superior a la del modelo estándar de CER, correspondiéndose con la volatilidad general registrada por los datos de la economía de los Estados Unidos de América entre 1950-1990. En la versión del modelo que incluye un segundo shock en el sector de capital humano, los desplazamientos de la oferta de trabajo incrementan de manera significativa

la volatilidad de las horas trabajadas y reducen significativamente la correlación horas-productividad.

En conclusión, la versión estocástica del modelo de crecimiento con acumulación de capital humano constituye un marco lo suficientemente amplio para reproducir la volatilidad general de la economía y en particular de las horas trabajadas. La posibilidad de asignar la dotación de tiempo a tres actividades, trabajo, estudio y ocio, origina un grado de sustitución entre tareas que incrementa de manera significativa la variabilidad de las mismas, reduce la correlación entre las horas trabajadas y los salarios, y logra reproducir de manera general los hechos observados en cuanto a volatilidades y correlaciones de las distintas variables económicas.



Referencias

- [1] Ambler, S. y A. Parquet (1992), "Government Spending and the Hours-Productivity Puzzle," Université du Quebec a Montreal.
- [2] Barro, R. y X. Sala-i-Martin (1992), "Convergence," *Journal of Political Economy* 100, págs. 223-251.
- [3] Becker, G. S. (1965), "A Theory of the Allocation of Time," *Economic Journal* 75, págs. 493-517.
- [4] Benhabib, J. y R. Perli (1994), "Uniqueness and Indeterminacy: Transitional Dynamics in a Model of Endogenous Growth," *Journal of Economic Theory* 63, págs. 113-142.
- [5] Boldrin, M. y M. Horvath (1995), "Labor Contracts and Business Cycles," *Journal of Political Economy* 103, N° 5, págs 972-1004.
- [6] Bond, E., P. Wang, y C.Yip (1996), "A General Two-Sector Model of Endogenous Growth with Human and Physical Capital: Balanced Growth and Transitional Dynamics," *Journal of Economic Theory* 68, págs. 149-173.
- [7] Caballé, J. y M. Santos (1993), "On Endogenous Growth with Physical and Human Capital," *Journal of Political Economy* 101, págs. 1042-1068.
- [8] Chamley, C. (1993), "Externalities and Dynamics in Models of "Learning or Doing," *International Economic Review* 34, págs. 583-609.
- [9] Christiano, L. y M. Eichenbaum (1992), "Current Real-Business-Cycle Theories and Aggregate Labor-Market Fluctuations," *American Economic Review* 82, No 3, June, págs. 430-450.
- [10] Faig, M. (1992), "A Simple Economy with Human Capital: Transitional Dynamics, Technology Shocks, and Fiscal Policies," Mimeo, University of Toronto.

- [11] Hansen, G.D. y R. Wright (1992), "The Labor Market in Real Business Cycle Theory," *Federal Reserve Bank of Minneapolis, Quarterly Review*.
- [12] Jones, L. y R. Manuelli (1994), "Las Fuentes del Crecimiento," *Cuadernos Económicos, I.C.E* 58, Vol. 3, págs. 71-106.
- [13] Ladrón de Guevara, A., S. Ortigueira y M. Santos (1995), "A Two-Sector Model of Endogenous Growth with Leisure," *Discussion Paper Series, Centro de Investigación Económica, Instituto Tecnológico Autónomo de México*. N° 9503, Agosto 1995.
- [14] Lucas, R. E. (1988), "On the Mechanics of Economic Development," *Journal of Monetary Economy* 22, págs. 3-42.
- [15] Lucas, R. E. (1990), "Supply Side Economics: An Analytical Review," *Oxford Economic Papers* 42, págs 293-317.
- [16] Mankiw, G., D. Romer y D. Weill (1992), "A Contribution to the Empirics of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics* 107, págs. 407-437.
- [17] Mulligan, C. B. y X. Sala-i-Martin (1993), "Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. CVIII, págs. 739-775.
- [18] Ortigueira, S. (1995), "Un Análisis Dinámico de un Modelo de Crecimiento Endógeno con Ocio," *Capítulo Segundo de Tesis Doctoral por la Universidad Carlos III de Madrid*.
- [19] Ortigueira, S. y M. Santos (1994), "On Convergence in Endogenous Growth Models," *Discussion Paper, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Centro de Investigación Económica*, N° 9409.
- [20] Solow, R. (1956), "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics* 70, págs. 65-94.

- [21] Uzawa, H. (1965), "Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth," *International Economic Review* 6, págs. 18-31.

Capítulo dos

Crecimiento Endógeno con Ocio Cualificado y Costes de Ajuste: Un Análisis Dinámico

1. Introducción

En este capítulo estudiaremos un modelo de equilibrio general que engloba diferentes extensiones del modelo de crecimiento endógeno de Uzawa-Lucas, con capital humano, incluyendo ocio como un tercer uso de la dotación de tiempo y costes de ajuste sobre la inversión en capital físico. Para una exposición detallada de la literatura relacionada, véase Ladrón de Guevara, Ortigueira y Santos (1995).

En la reciente literatura de crecimiento se han estudiado dos casos extremos sin costes de ajuste, que llamaremos respectivamente modelo con ocio cualificado [véase Ortigueira (1995)] y no cualificado [véase Ladrón de Guevara *et al.* (1995)]. En el primero se asume que el stock de capital humano alcanzado por la población condiciona la utilidad. Este capital entra simétricamente, junto con la asignación de tiempo al ocio, como segundo argumento en la función de utilidad. En el segundo modelo la utilidad marginal del ocio es independiente del nivel de educación de los agentes, y por tanto el stock de capital humano no afecta al nivel de utilidad.

El problema de optimización del modelo con ocio cualificado es globalmente cóncavo, y por tanto presenta un comportamiento estándar en esta literatura, con un único estado estacionario globalmente estable. Sin embargo, en el modelo con ocio no cualificado los agentes derivan utilidad del consumo y de la asignación de ocio, independientemente del grado de cualificación de los mismos. Dicha formulación da lugar a importantes no concavidades. Como resultado, el modelo presenta una amplia gama de posibles resultados,

incluyendo multiplicidad y no interioridad de estados estacionarios.

El capítulo a desarrollar plantea una generalización que aglutina a los modelos anteriores como casos extremos. Se considera una función de utilidad instantánea más general, que permite diversos grados de cualificación del ocio. La utilidad se deriva del consumo y de las unidades eficientes de ocio, es decir, de una medida de la asignación de ocio ponderada por el stock de capital humano. De esta manera, el nivel de capital humano alcanzado por los agentes afecta positivamente a la utilidad marginal del ocio.

En el modelo cóncavo los agentes asignan el stock de capital humano, que en lo sucesivo denotaremos con la letra h , a tres actividades, de acuerdo con el tiempo. De esta manera, ℓh se asigna al disfrute del ocio, donde ℓ es la fracción de tiempo destinada a esta actividad, uh a la producción del bien físico, donde u es el trabajo, y la fracción restante, $(1 - u - \ell)h$, a la producción de capital humano, donde $(1 - u - \ell)$ es el tiempo de estudio. Con una formulación más general, cuando el grado de cualificación del ocio disminuye, el stock de capital humano no entra simétricamente con el tiempo asignado al ocio en la función de utilidad, y el segundo argumento de la misma queda dividido por un término que depende del capital humano, dando origen a no concavidades en el problema. Como se comentó antes, a medida que disminuye el grado de cualificación del ocio se incrementan las posibilidades de encontrar casos de multiplicidad y no interioridad de estados estacionarios.

El marco general del modelo considera una segunda generalización respecto de los estudios antes citados: en el proceso de acumulación de capital físico se incluirán costes de ajuste sobre la inversión en este sector. Como se verá posteriormente, el considerar costes de ajuste es un factor determinante en el proceso de inversión en capital físico, y por tanto afectará las proporciones de estado estacionario, desincentivando la acumulación del mismo, así como la velocidad y direcciones de convergencia. En las diversas regresiones estudiadas por Mankiw, Romer y Weil (1992) los parámetros de convergencia condicionada obtenidos oscilan entre el 0.6% y el 2%. Barro y Sala-i-Martin (1992) también encuen-

tran evidencia empírica de convergencia condicional para diferentes grupos de países, y en todos los casos el parámetro de convergencia se encuentra entre 1.8% y 2.4%. Sin embargo, los distintos modelos de crecimiento presentan tasas de convergencia significativamente superiores a las estimadas por los estudios empíricos. Ortigueira y Santos (1994) determinan analíticamente el valor del parámetro de convergencia para un modelo de dos sectores con capital humano, y estudian diversas calibraciones de los modelos con uno y dos sectores. En las diversas calibraciones del modelo de dos sectores el parámetro de convergencia se mantuvo en el orden del 19% al 30%. En este sentido, la consideración de costes de ajuste sobre la inversión de capital físico reduce significativamente las velocidades de convergencia del modelo y mejora notablemente el comportamiento del mismo para explicar los datos.

En la próxima sección se desarrollará el marco general del modelo a estudiar, a partir del cual se analizarán separadamente ambas generalizaciones. En la tercera sección se estudiará la primera extensión del modelo incluyendo la función de utilidad más general que permite diversos grados de cualificación del ocio y se analizarán las distintas dinámicas del modelo para diversos casos con ocio no cualificado. En la cuarta sección se estudiarán los efectos de incluir costes de ajuste sobre la inversión en capital físico para una formulación de la función de utilidad con ocio cualificado. En la última sección se concluirá sobre las aportaciones de dichas extensiones al estudio de la dinámica de crecimiento y convergencia de las economías.

2. Modelo General

La economía está poblada por un continuo de hogares idénticos de vida infinita. Los mismos crecen a una tasa exógenamente determinada, $n \geq 0$. De esta manera, en cada instante de tiempo el tamaño de la población será:

$$N(t) = N_0 e^{nt} \quad (2.1)$$

Los hogares asignan su dotación instantánea de tiempo a tres posibles actividades: trabajo, $u(t)$, ocio, $\ell(t)$, y estudio, $(1 - u(t) - \ell(t))$. Cada unidad familiar deriva utilidad del consumo de un único bien agregado $\tilde{c}(t)$, y de una medida del nivel de ocio asignado. Las unidades efectivas de ocio son función de la asignación de tiempo $\ell(t)$ ponderada por un índice del nivel de educación, $\tilde{h}(t)^\lambda$, con $0 \leq \lambda \leq 1$. La función de utilidad, $U[\tilde{c}(t), \ell(t)\tilde{h}(t)^\lambda]$ es C^2 , estrictamente cóncava y creciente en ambos argumentos. Los agentes descuentan el futuro a una tasa constante, ρ

En el sector del bien de consumo la tecnología está determinada por una función C^2 , globalmente cóncava, creciente en ambos argumentos y linealmente homogénea en capital físico, $\tilde{K}(t)$, y trabajo, $\tilde{L}(t)$. La función de producción presenta derivadas parciales no acotadas en la frontera, y se asume adicionalmente que ambos factores son esenciales en el proceso productivo:

$$\lim_{\tilde{L} \rightarrow 0} F_L(\bar{K}, \tilde{L}) = \infty, \quad \lim_{\tilde{K} \rightarrow 0} F_{\tilde{K}}(\tilde{K}, \bar{L}) = \infty, \quad F(0, \tilde{L}) = F(\tilde{K}, 0) = 0 \quad (2.2)$$

donde los subíndices denotan la variable respecto de la cual se toman las derivadas parciales, manteniendo fijas $\bar{K} > 0$ y $\bar{L} > 0$. Adicionalmente se asume que $F_{\tilde{K}\tilde{K}}(\tilde{K}, \bar{L}) < 0$ y $F_{\tilde{L}\tilde{L}}(\bar{K}, \tilde{L}) < 0$. Los agentes asignan una fracción $u(t)$ de su dotación de tiempo a la

producción del bien físico, y la eficiencia por unidad de trabajo está determinada por el stock de capital humano $\tilde{h}(t)$. Por tanto, el trabajo agregado es $\tilde{L}(t) = N(t)u(t)\tilde{h}(t)$.

El bien agregado puede ser acumulado como capital físico, o vendido para el consumo. El capital físico se deprecia a una tasa constante $\pi \geq 0$. En el proceso de acumulación de capital físico se consideran costes de ajuste sobre la inversión en este sector. De esta manera la restricción tecnológica para la producción de capital físico queda:

$$F\left[\tilde{K}(t), N(t)u(t)\tilde{h}(t)\right] - \tilde{C}(t) \geq \dot{\tilde{K}}(t) + \pi\tilde{K}(t) + \phi \frac{\dot{\tilde{K}}^2(t)}{\tilde{K}(t)} \quad (2.3)$$

donde el lado derecho de la expresión es el gasto en inversión bruta. El último término representa la función de costes de ajuste. En la literatura de costes de ajuste se estudian las tasas óptimas de inversión en función de la q de Tobin (proporción entre el valor de mercado de la empresa y su coste de reposición). La formulación cuadrática de costes de ajuste planteada ha sido previamente usada en la literatura [véanse Hayashi F. (1982) y Summers (1981)], y origina una función de inversión lineal respecto de la q de Tobin. Como se analizará posteriormente, si el valor de mercado del capital instalado respecto de su costes de reposición se incrementa en una unidad, la tasa de inversión óptima se incrementará en $\frac{1}{2\phi}$. El inverso del parámetro ϕ determina por tanto la sensibilidad de la función de inversión óptima respecto de la q de Tobin.

En lo sucesivo expresamos el consumo y el capital físico en términos per cápita: $\tilde{c}(t) = \frac{\tilde{C}(t)}{N(t)}$ y $\tilde{k}(t) = \frac{\tilde{K}(t)}{N(t)}$. Si dividimos la ecuación (2.3) por $\tilde{k}(t)$, expresando la producción y el consumo por unidad de capital físico, los costes de ajuste son homogéneos de grado cero respecto de la inversión neta por unidad de capital físico, $\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)}$. Esta condición es requerida para que el modelo presente sendas de crecimiento equilibrado.

$$F\left[1, \frac{u(t)\tilde{h}(t)}{\tilde{k}(t)}\right] - \frac{\tilde{c}(t)}{\tilde{k}(t)} = \frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} + \phi \left(\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} + n\right)^2 + \pi + n$$

Siguiendo a Lucas (1988), en el sector de capital humano las unidades eficientes de producción, $\tilde{h}(t) (1 - u(t) - \ell(t))$, presentan productividad marginal constante, $\delta > 0$, y se asume que los conocimientos se transfieren a las nuevas generaciones sin coste alguno. El capital humano se deprecia a una tasa constante, $\theta \geq 0$. La restricción de acumulación en este sector queda:

$$\dot{\tilde{h}}(t) \leq \delta \tilde{h}(t) (1 - u(t) - \ell(t)) - \theta \tilde{h}(t) \quad (2.4)$$

En ausencia de externalidades, el equilibrio competitivo coincide con la solución del siguiente problema de optimización: en cada instante los agentes escogen las proporciones del bien físico asignadas al consumo y a la inversión, así como las fracciones de tiempo dedicadas a las tareas de producción, educación y actividades de ocio respectivamente, dadas las restricciones (2.3) y (2.4), y los niveles iniciales de ambos capitales \tilde{k}_0 y \tilde{h}_0 , con el objeto de maximizar el flujo descontado de la utilidad social instantánea, derivada del consumo y de las unidades eficientes de ocio. Para cualquier solución óptima, las restricciones (2.3) y (2.4) deben cumplirse con igualdad.

Definición 2.1: Una solución óptima para esta economía es un conjunto de sendas $\{\tilde{c}(t), \tilde{k}(t), \tilde{h}(t), \ell(t), u(t)\}_{t=0}^{\infty}$ que soluciona el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} (P) \quad W_{(\tilde{k}_0, \tilde{h}_0)} &= \underset{\tilde{c}(t), \ell(t), u(t)}{Max} \int_{t=0}^{\infty} N(t) U [\tilde{c}(t), \ell(t) \tilde{h}(t)^\lambda] e^{-\rho t} dt \\ &\quad s.a. \\ \dot{\tilde{k}}(t) &= F[\tilde{k}(t), u(t) \tilde{h}(t)] - (\pi + n) \tilde{k}(t) - \phi \tilde{k}(t) \left(\frac{\dot{\tilde{k}}(t)}{\tilde{k}(t)} + n \right)^2 - \tilde{c}(t) \\ \dot{\tilde{h}}(t) &= \delta \tilde{h}(t) (1 - u(t) - \ell(t)) - \theta \tilde{h}(t) \\ \tilde{c}(t) &\geq 0, \tilde{k}(t) \geq 0, \tilde{h}(t) \geq 0 \\ \ell(t) &\geq 0, u(t) \geq 0, \ell(t) + u(t) \leq 1 \\ \tilde{k}_0, \tilde{h}_0 &\text{ dados, } N(t) = N_0 e^{nt} \end{aligned}$$

Bajo ciertas condiciones, el modelo presenta equilibrios en los que las asignaciones de

tiempos a las distintas actividades se mantienen constantes y sin embargo las variables en términos per cápita, como el consumo y los stocks de capitales físico y humano crecen a una tasa constante. Esta tasa está endógenamente determinada por las decisiones óptimas de los agentes. En lo sucesivo, a este estado con crecimiento sostenido lo denominaremos senda de crecimiento equilibrado:

Definición 2.2: *Una senda de crecimiento equilibrado (o equilibrio de estado estacionario) para esta economía es una solución óptima $\{\tilde{c}(t), \tilde{k}(t), \tilde{h}(t), \ell(t), u(t)\}$ para unas condiciones iniciales determinadas, $\tilde{k}(0) = \tilde{k}_0$ y $\tilde{h}(0) = \tilde{h}_0$, de manera tal que $\tilde{c}(t)$, $\tilde{k}(t)$ y $\tilde{h}(t)$ crezcan a tasas constantes y las asignaciones de tiempo, $\ell(t)$ y $u(t)$ así como el producto por unidad de capital físico, $F[\tilde{k}(t), u(t)\tilde{h}(t)]/\tilde{k}(t)$, permanezcan constantes.*

Se puede demostrar que en el estado estacionario de la economía las variables en términos per cápita $\tilde{c}(t)$, $\tilde{k}(t)$ y $\tilde{h}(t)$ crecen a una misma tasa ν , endógenamente determinada, y por tanto mantienen unas proporciones $\frac{\tilde{k}(t)}{\tilde{h}(t)}$ y $\frac{\tilde{c}(t)}{\tilde{k}(t)}$ constantes. La existencia de una senda de crecimiento equilibrado requiere de ciertas restricciones de separabilidad en el conjunto de funciones de utilidad [véase King, Plosser y Rebelo (1988)]. Además de requerirse la concavidad global de la función de utilidad, la misma debe ser separable en ambos argumentos, consumo y unidades eficientes de ocio, y presentar elasticidad de sustitución intertemporal constante en el consumo y en el stock de capital humano. Estas condiciones garantizan que los efectos renta y sustitución asociados al crecimiento sostenido en el consumo, el stock de capital humano y la productividad del trabajo no afecten las asignaciones de tiempo a las diferentes tareas en el estado estacionario. Solamente las siguientes formas funcionales son por tanto consistentes con un crecimiento equilibrado

$$U[\tilde{c}(t), \ell(t)\tilde{h}(t)^\lambda] = \frac{1}{1-\sigma} \left[\tilde{c}(t)^\alpha (\ell(t)\tilde{h}(t)^\lambda)^{1-\alpha} \right]^{1-\sigma} \quad 0 < \alpha < 1, \sigma > 0, \sigma \neq 1 \quad (2.5)$$

$$U[\tilde{c}(t), \ell(t)\tilde{h}(t)^\lambda] = \alpha \log \tilde{c}(t) + (1-\alpha) \log (\ell(t)\tilde{h}(t)^\lambda) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.6)$$

Siguiendo a Caballé y Santos (1993) las variables en términos per cápita se pueden

transformar, usando la tasa de crecimiento de estado estacionario como el parámetro de descuento, es decir,

$$\begin{aligned} k(t) &= \tilde{k}(t)e^{-\nu t} \\ h(t) &= \tilde{h}(t)e^{-\nu t} \\ c(t) &= \tilde{c}(t)e^{-\nu t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

De esta forma, las variables transformadas $k(t)$, $h(t)$ y $c(t)$ permanecen fijas en dicho estado estacionario con tasa de crecimiento ν .

El problema (P) se puede redefinir de la manera siguiente:

$$(P') \quad W_{(k_0, h_0)} = \underset{c(t), \ell(t), u(t)}{Max} \int_0^{\infty} \frac{[c(t)^\alpha (\ell(t)h(t)^\lambda)^{1-\alpha}]^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{-\{\rho - n - \nu(1-\sigma)[\alpha + \lambda(1-\alpha)]\}t} dt$$

s.a.

$$\dot{k}(t) = F[k(t), u(t)h(t)] - (\pi + n + \nu)k(t) - \phi k(t) \left(\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} + n + \nu \right)^2 - c(t) \quad (2.8)$$

$$\dot{h}(t) = \delta h(t)(1 - u(t) - \ell(t)) - (\theta + \nu)h(t) \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} c(t) &\geq 0, \quad k(t) \geq 0, \quad h(t) \geq 0 \\ \ell(t) &\geq 0, \quad u(t) \geq 0, \quad \ell(t) + u(t) \leq 1 \\ k_0, \quad h_0 &\text{ dados} \end{aligned}$$

El problema anterior engloba las dos extensiones descritas: una función de utilidad que permite diversos grados de cualificación del ocio, y costes de ajuste sobre la inversión de capital físico. En la sección 3 analizaremos el modelo sin incluir costes de ajuste, con el objeto de evaluar los efectos del grado de cualificación del ocio en la dinámica del modelo como primera extensión del modelo de Uzawa-Lucas y estudiar en detalle las dinámicas de las distintas economías. En la cuarta sección estudiaremos las implicaciones de incluir costes de ajuste sobre la inversión en capital físico en el modelo con ocio cualificado

($\lambda = 1$). Como veremos en esa sección, la función de utilidad con ocio cualificado garantiza la unicidad del estado estacionario, lo cual facilita el estudio de la dinámica de transición con costes de ajuste.

3. Modelo sin Costes De Ajuste

Como se explicó anteriormente, el modelo descrito no es cóncavo, a excepción del caso particular con $\lambda = 1$, por lo que podría presentar una dinámica compleja, con posibilidad de múltiples estados estacionarios. Como se verá en esta sección, cuando el grado de cualificación del ocio es inferior a la unidad ($\lambda < 1$), la unicidad del estado estacionario se puede perder. En caso de múltiples estados estacionarios, dependiendo de la proporción inicial entre el capital físico y el humano, la economía convergerá a alguno de los estados estacionarios localmente estables. Los mismos presentan diferentes tasas de crecimiento así como distintas asignaciones de tiempo a las diversas actividades. La función de utilidad del modelo general es homogénea de grado $(1 - \sigma)[\alpha + \lambda(1 - \alpha)]$ y las restricciones de factibilidad son linealmente homogéneas en ambos capitales, $k(t)$ y $h(t)$. Esto implica que las funciones de política, $\left(\frac{c(t)}{k(t)}\right)$, $\ell(t)$ y $u(t)$ son homogéneas de grado cero en ambos capitales [véase Caballé y Santos (1993)]. El consumo por unidad de capital físico y las asignaciones de tiempo a las distintas actividades dependerán por tanto exclusivamente de la proporción $\left(\frac{k(t)}{h(t)}\right)$. Esta propiedad de los modelos de dos sectores ya ha sido usada previamente para reducir la dimensión del problema, caracterizar el (los) estado(s) estacionario(s) y estudiar la dinámica [véanse entre otros Bond, Wang y Yip (1996) y Mulligan y Sala-i-Martin (1993)]. Como se verá más adelante, en el caso de múltiples estados estacionarios, dependiendo de esta proporción inicial $\left(\frac{k(t)}{h(t)}\right)$, se convergerá en el largo plazo a uno u otro de los estados estacionarios localmente estables.

A continuación desarrollamos las condiciones de primer orden del problema de la sección anterior, (P') , sin considerar los costes de ajuste. Supongamos que $\rho - n - \nu(1 - \sigma)[\alpha + \lambda(1 - \alpha)] > 0$, de tal forma que el problema cumpla las condiciones de transversalidad. De esta manera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, conjuntamente con las restricciones (2.8) y (2.9), nos permite caracterizar las sendas óptimas de esta economía :

$$\varphi_1(t) = \alpha c(t)^{\alpha(1-\sigma)-1} (\ell(t)h(t)^\lambda)^{(1-\alpha)(1-\sigma)} \quad (3.1)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{(1-\alpha)}{\delta \ell(t)h(t)} c(t)^{\alpha(1-\sigma)} (\ell(t)h(t)^\lambda)^{(1-\alpha)(1-\sigma)} \quad (3.2)$$

$$\frac{\dot{\varphi}_2(t)}{\varphi_1(t)} = \frac{1}{\delta} F_L(k(t), u(t)h(t)) \quad (3.3)$$

$$\frac{\dot{\varphi}_1(t)}{\varphi_1(t)} = \pi + \rho + \nu [1 - (1-\sigma)(\alpha + \lambda(1-\alpha))] - F_k(k(t), u(t)h(t)) \quad (3.4)$$

$$\frac{\dot{\varphi}_2(t)}{\varphi_2(t)} = \rho - n + \theta + \nu [1 - (1-\sigma)(\alpha + \lambda(1-\alpha))] - \delta [1 - (1-\lambda)\ell(t)] \quad (3.5)$$

Para reducir la dimensión del sistema, con las ecuaciones (3.1) y (3.2) eliminamos las covariables de estado $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ del sistema anterior. Incluyendo las dos leyes de movimiento de ambos capitales, (2.8) y (2.9), e imponiendo estacionariedad obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones, del que podemos hallar los valores de largo plazo para una solución interior:

$$\frac{(1-\alpha)u^*}{\alpha} \frac{\left(\frac{c}{\ell^*}\right)^*}{\ell^*} = \left(\frac{uh}{k}\right)^* F_L\left(1, \left(\frac{uh}{k}\right)^*\right) \quad (3.6)$$

$$F_K\left(1, \left(\frac{uh}{k}\right)^*\right) = \pi + \rho + \nu [1 - (1-\sigma)(\alpha + \lambda(1-\alpha))] \quad (3.7)$$

$$\delta [1 - (1-\lambda)\ell^*] = \rho - n + \theta + \nu [1 - (1-\sigma)(\alpha + \lambda(1-\alpha))] \quad (3.8)$$

$$F\left(1, \left(\frac{uh}{k}\right)^*\right) = \left(\frac{c}{k}\right)^* + (\pi + n + \nu) \quad (3.9)$$

$$1 - u^* - \ell^* = \left(\frac{\theta + \nu}{\delta}\right) \quad (3.10)$$

Todos los valores de estado estacionario $u^*, \nu, \left(\frac{k}{h}\right)^*$ y $\left(\frac{c}{k}\right)^*$ pueden expresarse como funciones del valor de ocio de estado estacionario, ℓ^* , haciendo uso de las ecuaciones

(3.7), (3.8), (3.9) y (3.10) respectivamente. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3.6) se obtiene la siguiente ecuación:

$$f(\ell^*) = [F[1, \frac{uh}{k}(\ell^*)] - \pi - n - \nu(\ell^*)] \left[1 - \ell^* - \frac{[\theta + \nu(\ell^*)]}{\delta} \right] - \frac{\alpha \ell^* F_L[1, \frac{uh}{k}(\ell^*)] \frac{uh}{k}(\ell^*)}{1 - \alpha} = 0 \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{uh}{k}(\ell^*) &= F_K^{-1} [n + \pi - \theta + \delta (1 - (1 - \lambda) \ell^*)] \\ \nu(\ell^*) &= \frac{\delta [1 - (1 - \lambda) \ell^*] - \rho - \theta + n}{1 - (1 - \sigma) [\alpha + \lambda (1 - \alpha)]} \end{aligned}$$

El número de estados estacionarios interiores es igual al número de soluciones ℓ^* , para la ecuación $f(\ell^*) = 0$ que satisfacen la positividad para los tres usos del tiempo. Es fácil demostrar que la función $f(\ell^*)$ es estrictamente convexa para todo el dominio de $1 > \ell^* > 0$, por lo que el modelo puede presentar como máximo dos valores de estado estacionario interior. El problema de existencia y multiplicidad de estados estacionarios se reduce al análisis de las raíces de la ecuación (3.11), que además cumplen las condiciones de interioridad $\ell^* > 0$, $1 - \ell^* > u^*(\ell^*) > 0$, y transversalidad, $\rho - n - (1 - \sigma) [\alpha + \lambda (1 - \alpha)] \nu(\ell^*) > 0$. Las condiciones anteriores quedan resumidas en la siguiente proposición:

Proposición 3.1: *Consideremos el problema de optimización (P'), donde:*

- La función $F(K, L)$ es C^2 , creciente en ambos argumentos, cóncava, linealmente homogénea y satisface las condiciones de Inada (2.2). Además, $F_{KK}(K, L) < 0$ y $F_{LL}(K, L) < 0$ para cualquier vector positivo (K, L) .

- La función de utilidad considerada presenta elasticidad de sustitución constante respecto de ambos argumentos, $U(c, \ell h^\lambda) = \frac{1}{1-\sigma} \left(c^\alpha (\ell h^\lambda)^{1-\alpha} \right)^{1-\sigma}$, $\sigma > 0$, $\sigma \neq 1$, $0 < \alpha < 1$, y $0 \leq \lambda \leq 1$.

Las siguientes condiciones son necesarias y suficientes para la existencia de un estado estacionario interior, $\{\ell^*, \nu, u^*, \left(\frac{k}{h}\right)^*, \left(\frac{c}{k}\right)^*\}$:

$$(a) \ 0 \in (\min_{0 < \ell^* < 1} f(\ell^*), \max_{0 < \ell^* < 1} f(\ell^*))$$

(b) Para algún ℓ^* tal que $0 = f(\ell^*)$ se debe cumplir :

$$(b.1) \ \frac{\rho-n}{[\alpha+\lambda(1-\alpha)]} > (1-\sigma) \{\delta[1-(1-\lambda)\ell^*] - \theta\}$$

$$(b.2) \ (1-\lambda)\ell^* < 1 - \frac{\theta(1-\sigma)[\alpha+\lambda(1-\alpha)]}{\delta} - \frac{\rho-n}{\delta}$$

$$(b.3) \ \delta\ell^* \{\lambda - (1-\sigma)[\alpha + \lambda(1-\alpha)]\} < (\rho-n) - (1-\sigma)[\alpha + \lambda(1-\alpha)](\delta - \theta)$$

Desde ahora restringiremos la función de producción $F(\cdot, \cdot)$ con el objeto de estudiar en detalle la dinámica del modelo. Haciendo uso de una formulación Cobb-Douglas, $F(K(t), L(t)) = AK(t)^\beta L(t)^{1-\beta}$, la ecuación (3.11) es cuadrática:

$$\left\{ \pi(1-\beta) + \rho - \beta n + (x-\beta) \left[\frac{n-\theta-\rho+\delta[1-(1-\lambda)\ell^*]}{\beta x} \right] \right\} \left[\frac{\delta x(1-\ell^*) - \delta[1-(1-\lambda)\ell^*] + \rho - n + \theta(1-x)}{\delta x} \right] - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \ell^* [\pi + n - \theta + \delta[1-(1-\lambda)\ell^*]] = 0 \quad (3.12)$$

donde $x = 1 - (1-\sigma)[\alpha + \lambda(1-\alpha)]$

Para todo valor del parámetro $\lambda < 1$ se podrían encontrar combinaciones de parámetros que permitieran obtener multiplicidad de estados estacionarios, ya que la segunda derivada de la ecuación anterior es:

$$f''(\ell^*) = \delta(1-\lambda) \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{1-\lambda}{x} - 1 \right) + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right] \quad (3.13)$$

Se puede observar que dicho término se reduce a medida que aumenta el grado de cualificación del ocio ($\lim_{\lambda \rightarrow 1} f''(\ell^*) = 0$). En el caso cóncavo, ($\lambda = 1$), la ecuación (3.12) es lineal y garantiza un único valor interior de estado estacionario. Por tanto, en el caso particular de $\lambda = 1$, la dinámica no presentará ni multiplicidades ni no interioridades de estados estacionarios [Véase Ortigueira (1995)]. Es en el caso no cóncavo donde el modelo

puede presentar una dinámica variada y realmente compleja, donde la multiplicidad de estados estacionarios nos lleva a la posibilidad de tener dos economías creciendo a tasas distintas en el largo plazo. Dependiendo entonces de la proporción inicial entre las dos variables de estado (capitales físico y humano respectivamente) la economía convergerá bien a un estado interior con estudio positivo y crecimiento superior a $-\theta$, o bien a un estado no interior sin inversión en capital humano, y con un decrecimiento económico igual a la tasa a la que se deprecia el capital humano. El análisis detallado de la dinámica en el caso de múltiples equilibrios se explicará en la sección 3.2.

En la figura 1 se ilustra, para distintos valores de los parámetros del modelo, la región correspondiente a múltiples estados estacionarios, determinada por las condiciones descritas en la proposición 3.1. En la región superior el modelo presenta un único estado estacionario globalmente estable, ya que solamente la primera raíz del polinomio cumple las condiciones de interioridad. En esta región, la segunda raíz se corresponde con valores negativos del trabajo ($u_2^* < 0$). En la región inferior el discriminante de la ecuación cuadrática que determina los niveles de ocio de estado estacionario es negativo, y por tanto el modelo no presenta ningún equilibrio interior. En este caso la economía converge globalmente a un único estado estacionario sin crecimiento de largo plazo. Los agentes no invierten en el sector de capital humano ($\ell_3^* + u_3^* = 1$) y la economía decrece a la tasa a la que se deprecia el stock de capital humano ($\nu_3 = -\theta$).

En la región central, acotada por las condiciones de existencia e interioridad de la proposición 3.1, el modelo presenta dos estados estacionarios interiores y un tercer estado estacionario frontera sin inversión en capital humano. En este caso la estabilidad global se pierde, y la dinámica del modelo se complica. Se analizará posteriormente que uno de los dos estados estacionarios interiores y el estado frontera son localmente estables, mientras que el estado interior con un nivel intermedio de $\frac{k(t)}{h(t)}$ es localmente inestable. A partir de un valor del parámetro λ , que denotaremos $\hat{\lambda}$, la economía no presenta múltiples estados estacionarios (véase la figura 1).

Podemos reducir la dimensión del modelo expresando la variable de decisión $c(t)$ y la variable de estado $k(t)$ por unidad de capital humano. De esta manera, los agentes decidirán en cada instante los niveles de ocio $\ell(t)$ y trabajo $u(t)$, así como el consumo por unidad de capital físico $\frac{c(t)}{k(t)}$ en función de una única variable de estado $\frac{k(t)}{h(t)}$. Dependiendo de la proporción inicial entre ambos capitales, las economías decidirán de manera óptima reducir o incrementar paulatinamente esta proporción entre ambos capitales para converger a uno de los dos estados estacionarios localmente estables, bien sea el que presenta el máximo crecimiento o el estado estacionario frontera sin inversión en capital humano.

A medida que incrementamos el valor de λ se reduce la región de múltiples estados estacionarios. Este efecto se ilustra en la figura 1, donde para valores fijos de los demás parámetros, $\sigma=1, \alpha=0.2, \rho=0.05, n=0, A=1, \beta=0.3, \pi=0$ y $\theta=0$ se reduce el intervalo del parámetro δ que presenta múltiples estados estacionarios a medida que incrementamos el grado de cualificación del ocio. A partir del valor límite $\hat{\lambda}$, no se presenta multiplicidad de estados estacionarios.

El valor límite de $\hat{\lambda}$ a partir del cual no existen múltiples estados estacionarios depende sin embargo de los demás parámetros. Valores altos de λ reducen el grado de concavidad de la ecuación (3.12). Sin embargo, los valores de α y β pueden contrarrestar este efecto, como se deduce en la ecuación (3.13). De esta manera el modelo puede presentar múltiples estados estacionarios para cualquier valor de $\lambda \in (0, 1)$, mientras el término $\delta(1 - \lambda) \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \right)$ sea significativo. Este efecto se ilustra en las figuras 2 y 3, en los que la región de múltiples estados estacionarios se incrementa a medida que aumenta el parámetro α o disminuye el parámetro β . Como consecuencia, el valor límite $\hat{\lambda}$ se incrementa y podemos encontrar casos de múltiples estados estacionarios para cualquier rango del grado de cualificación del ocio.

A continuación desarrollaremos las condiciones de existencia y multiplicidad planteadas en la proposición 3.1 para el caso aditivo. El análisis es equivalente en el caso de la función de utilidad más general. En cualquier caso la ecuación que determina el nivel de ocio de

estado estacionario es cuadrática con ambas formulaciones, por lo que se pueden determinar analíticamente las condiciones de existencia y multiplicidad de estados estacionarios interiores, si bien es cierto que las expresiones obtenidas son significativamente extensas con una formulación de utilidad multiplicativamente separable ($\sigma \neq 1$).

Si consideramos el caso particular con elasticidad de sustitución intertemporal del consumo $\frac{1}{\sigma} = 1$, la función de utilidad correspondiente quedaría $U(c, \ell h^\lambda) = \alpha \log(c) + (1 - \alpha) \log(\ell h^\lambda)$. Con esta formulación aditiva la ausencia de efectos cruzados simplifica las ecuaciones. La ecuación que determina los valores de estado estacionario queda:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) (\rho - n - \delta \lambda \ell^*) \{ \rho - \beta n + (1 - \beta) (n + \pi - \theta - \rho + \delta [1 - (1 - \lambda) \ell^*]) \} = \\ = (1 - \beta) (\pi + n - \theta + \delta [1 - (1 - \lambda) \ell^*]) \delta \ell^* \end{aligned} \quad (3.14)$$

Las condiciones que garantizan la interioridad del estado estacionario se resumen en la siguiente proposición:

Proposición 3.2: *Consideremos el problema de optimización (P'), donde:*

- *La función de producción es Cobb-Douglas, $F(k, uh) = Ak^\beta (uh)^{1-\beta}$.*
- *La función de utilidad es aditivamente separable en consumo y unidades eficientes de ocio, $U(c, \ell h^\lambda) = \alpha \log(c) + (1 - \alpha) \log(\ell h^\lambda)$.*

*La expresión (3.14) se puede formular como una ecuación cuadrática, $P\ell^{*2} + Q\ell^* + R = 0$, y la economía puede presentar dos estados estacionarios interiores determinados por los siguientes valores de ocio:*

$$\ell_1^* = \frac{-Q - \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}, \quad \ell_2^* = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}$$

donde

$$P = (1 - \beta) (1 - \lambda) \left[\left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) + \lambda \right] \delta^2$$

$$Q = -\delta(1-\beta)(\pi+n+\delta-\theta)\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}+\lambda\right] - \delta(\rho-n)[\lambda\beta+(1-\lambda)(1-\beta)]$$

$$R = (\pi+n+\delta-\theta)(1-\beta)(\rho-n) + \beta(\rho-n)^2$$

De las ecuaciones (3.8) y (3.10) se determina el valor del trabajo en función del nivel de ocio, $u^* = \frac{\rho-n}{\delta} - \lambda\ell^*$. Por lo tanto, las condiciones que garantizan la existencia de dos estados estacionarios interiores se reducen a:

$$(a) \left\{ \left(\frac{(1-\beta)(\pi+n+\delta-\theta)}{\beta} \right) \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + \lambda \right) + \frac{(\rho-n)(\lambda+\beta-1)}{\beta} \right\}^2 > \frac{4\alpha(1-\beta)(1-\lambda)(\rho-n)^2}{\beta(1-\alpha)}$$

$$(b) \ell_2^* < \frac{\rho-n}{\lambda\delta}.$$

$$(c) \ell_2^* < \frac{\delta-\rho+n}{\delta(1-\lambda)}$$

Es fácil ver que la ecuación cuadrática es estrictamente convexa, positiva y decreciente en $\ell=0$, por lo que las condiciones de interioridad $\ell_1^*>0$, $\ell_2^*>0$ se cumplen siempre. La condición (a) viene de imponer positividad del discriminante, y las condiciones (b) y (c) vienen de garantizar interioridad, $u_2^*>0$ y $1-u_2^*-\ell_2^*>0$ respectivamente. Las dos últimas condiciones de interioridad no son requeridas para el primer estado estacionario, pues como se demostrará posteriormente en la proposición 3.3, en el caso aditivo, para el primer estado estacionario con un menor nivel de ocio, los tiempos asignados a los dos sectores (trabajo y estudio) son mayores. Como consecuencia, en el primer estado estacionario la economía crece a una mayor tasa y presenta una menor proporción de capital físico por unidad de capital humano.

3.1. Análisis comparativo

Cuando el modelo presenta múltiples estados estacionarios, en aquellos con una mayor proporción de capital físico a capital humano la decisión óptima de los agentes implica una mayor proporción de consumo por unidad de capital humano y mayores niveles de ocio, con menores asignaciones al estudio. Como consecuencia se registran mayores niveles de utilidad en el corto plazo, pero menores tasas de crecimiento de largo plazo. En contra-

posición, las economías que presentan una alta proporción de capital humano por unidad de capital físico escogerán sendas con menores niveles de ocio y consumo, pero dedicarán más tiempo de estudio, convergiendo a una senda equilibrada de mayor crecimiento. El tiempo asignado al trabajo está indeterminado, y depende de los parámetros de la función de utilidad, σ , α , y λ . El resultado se resume en la siguiente proposición:

Proposición 3.3: *Consideremos la economía del problema (P'). Supongamos que la función de producción es Cobb-Douglas, $F(k, uh) = Ak^\beta(uh)^{1-\beta}$, con $A > 0$ y $0 < \beta < 1$. Supongamos que se cumplen las condiciones de la proposición 3.1 que garantizan la multiplicidad de estados estacionarios interiores, con lo que obtenemos dos estados estacionarios caracterizados por los valores: $\left\{ \left(\frac{c}{k} \right)_1^*, \ell_1^*, u_1^*, \left(\frac{k}{h} \right)_1^*, \nu_1 \right\}$ y $\left\{ \left(\frac{c}{k} \right)_2^*, \ell_2^*, u_2^*, \left(\frac{k}{h} \right)_2^*, \nu_2 \right\}$, de manera tal que $\left(\frac{k}{h} \right)_2^* > \left(\frac{k}{h} \right)_1^*$. Entonces:*

- (a) *El tiempo de estudio y la tasa de crecimiento son menores en el estado estacionario intensivo en capital físico: $1 - u_2^* - \ell_2^* < 1 - u_1^* - \ell_1^*$, $\nu_2 < \nu_1$.*
- (b) *El tiempo asignado al trabajo depende de los parámetros de la función de utilidad instantánea, de manera tal que $u_2^* < u_1^*$ para $\sigma > \frac{\alpha(1-\lambda)}{\alpha+\lambda(1-\alpha)}$, $u_2^* = u_1^*$ para $\sigma = \frac{\alpha(1-\lambda)}{\alpha+\lambda(1-\alpha)}$ y $u_2^* > u_1^*$ para $\sigma < \frac{\alpha(1-\lambda)}{\alpha+\lambda(1-\alpha)}$.*
- (c) *El nivel de ocio es mayor en el estado estacionario intensivo en capital físico: $\ell_2^* > \ell_1^*$*
- (d) *La proporción de consumo por unidad de capital humano es mayor en el estado estacionario intensivo en capital físico, $\left(\frac{c}{k} \right)_2^* > \left(\frac{c}{k} \right)_1^*$. La proporción de consumo por unidad de capital físico depende de los parámetros de la función instantánea de utilidad y de la elasticidad del capital físico respecto de la productividad marginal del factor trabajo, de manera tal que:*

Si $1 - (1 - \sigma)[\alpha + \lambda(1 - \alpha)] > \beta$, entonces $\left(\frac{c}{k} \right)_2^ < \left(\frac{c}{k} \right)_1^*$.*

Si $1 - (1 - \sigma)[\alpha + \lambda(1 - \alpha)] = \beta$, entonces $\left(\frac{c}{k} \right)_2^ = \left(\frac{c}{k} \right)_1^*$.*

Si $1 - (1 - \sigma)[\alpha + \lambda(1 - \alpha)] < \beta$, entonces $\left(\frac{c}{k} \right)_2^ > \left(\frac{c}{k} \right)_1^*$.*

Demostración:

(a) Las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.10) nos permiten hallar una relación entre la proporción capital físico a capital humano, $\left(\frac{k}{h}\right)$, y la tasa de crecimiento, ν :

$$\left(\frac{k}{h}\right)^* = \left[\frac{\pi + \rho + \nu x}{\beta A} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} u(\nu)^* \quad (3.15)$$

donde

$$x = 1 - (1 - \sigma) [\alpha + \lambda (1 - \alpha)]$$

y

$$u(\nu)^* = \frac{\nu [x + \lambda - 1] + \rho - n - \lambda (\delta - \theta)}{\delta (1 - \lambda)} \quad (3.16)$$

Derivando la expresión (3.15) respecto de la tasa de crecimiento, ν , obtenemos:

$$\frac{d\left(\frac{k}{h}\right)^*}{d\nu} = \left(\frac{k}{h}\right)^* \left\{ \frac{x + \lambda - 1}{\delta (1 - \lambda)} - \frac{x u^*}{(1 - \beta) (\pi + \rho + \nu x)} \right\}$$

Cuando $\sigma \leq \frac{\alpha(1-\lambda)}{\alpha+\lambda(1-\alpha)}$ la expresión entre llaves de la ecuación anterior es negativa, por lo que la proporción entre ambos capitales, $\left(\frac{k}{h}\right)^*$ y la tasa de crecimiento, ν , están inversamente relacionadas. En este caso la demostración del apartado (a) de la proposición es directa.

Cuando $\sigma > \frac{\alpha(1-\lambda)}{\alpha+\lambda(1-\alpha)}$, para que la derivada, $\frac{d\left(\frac{k}{h}\right)^*}{d\nu}$, sea negativa, se debe cumplir la siguiente desigualdad:

$$\frac{\beta x \delta (1 - \lambda) u^*}{(1 - \beta)} > (x + \lambda - 1) (\pi + \rho) - [\rho - n - \lambda (\delta - \theta)] x \quad (3.17)$$

La desigualdad anterior se puede demostrar desarrollando la condición de interioridad (b.3) de la proposición 3.1, que garantiza la positividad del tiempo de estudio para el segundo estado estacionario ($u_2^* > 0$). Despejando el nivel de ocio de dicha condición:

$$\ell_2^* < \frac{(\rho - n) - (1 - \sigma) [\alpha + \lambda (1 - \alpha)] (\delta - \theta)}{\delta \{ \lambda - (1 - \sigma) [\alpha + \lambda (1 - \alpha)] \}} \quad (3.18)$$

El valor del ocio para el segundo estado estacionario se puede determinar desarrollando la segunda raíz de la ecuación (3.12):

$$\ell_2^* = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}$$

donde

$$P = (1 - \lambda) \delta^2 \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha} (1 - \beta) x^2 - (x - \beta) (1 - \lambda - x) \right]$$

$$Q = (1 - \lambda - x) \delta \{ [(\pi + n)(1 - \beta) + \delta - \theta] x + \beta(\rho - n + \theta - \delta) \} - \delta(x - \beta)(1 - \lambda) [(\rho - n + \theta - \delta) - x(\theta - \delta)] - \frac{\alpha(1 - \beta) \delta x^2 (\pi + n + \delta - \theta)}{(1 - \alpha)}$$

$$R = \{ [(\pi + n)(1 - \beta) + \delta - \theta] x + \beta(\rho - n + \theta - \delta) \} [(\rho - n + \theta - \delta) - x(\theta - \delta)]$$

Sustituyendo el valor del ocio en la ecuación (3.18), y simplificando obtenemos la condición:

$$(\pi + \rho) [x + \lambda - 1] - [\rho - n - \lambda(\delta - \theta)] x < 0$$

Dicha condición garantiza que la desigualdad (3.17) se cumpla, por lo que el segundo estado estacionario, con mayor proporción de capital físico tendrá menor tasa de crecimiento y menor asignación de tiempo al estudio.

(b) De la ecuación (3.16) deducimos que:

$$\frac{du^*}{d\nu} = \frac{\lambda - (1 - \sigma) [\alpha + \lambda (1 - \alpha)]}{\delta (1 - \lambda)}$$

El signo de la derivada depende del numerador. Para $\sigma > \frac{\alpha(1 - \lambda)}{\alpha + \lambda(1 - \alpha)}$ la expresión es negativa, y podemos concluir que $u_2^* < u_1^*$. El mismo análisis nos permite concluir los demás casos del apartado (b).

(c) De la ecuación (3.8) determinamos que la tasa de crecimiento y el nivel de ocio están inversamente relacionados:

$$\frac{d\nu}{d\ell^*} = \frac{-\delta (1 - \lambda)}{1 - (1 - \sigma) [\alpha + \lambda (1 - \alpha)]} < 0$$

(d) De las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.8) obtenemos la proporción consumo a capital humano en función del nivel de ocio:

$$\left(\frac{c}{h}\right)^* = \frac{A(1-\beta)\alpha}{(1-\alpha)} \ell^* \left[\frac{\pi + \delta - \theta + n - \delta(1-\lambda)\ell^*}{\beta A} \right]^{\frac{\beta}{\beta-1}}$$

Derivando la expresión anterior y sustituyendo términos concluimos que la proporción $\left(\frac{c}{h}\right)^*$ y el nivel de ocio están positivamente relacionadas:

$$\frac{d\left(\frac{c}{h}\right)^*}{d\ell^*} = \frac{A\alpha(1-\beta)}{(1-\alpha)} \left[\left(\frac{k}{uh}\right)^{* \beta} + \frac{\delta(1-\lambda)\ell^*}{(1-\beta)A} \left(\frac{k}{uh}\right)^* \right] > 0$$

Respecto de la proporción entre consumo y capital físico, sustituyendo (3.7) en (3.9) obtenemos:

$$\left(\frac{c}{k}\right)^* = \frac{\rho - \beta n + (1-\beta)\pi}{\beta} + \nu \left(\frac{(1-\beta) - (1-\sigma)[\alpha + \lambda(1-\alpha)]}{\beta} \right)$$

Siguiendo el procedimiento de demostración de los otros apartados podemos concluir la demostración del apartado (d) determinando la derivada de la expresión anterior respecto de la tasa de crecimiento.

Corolario:

Consideremos el problema (P') , donde $U(c, \ell h^\lambda) = \alpha \log c + (1-\alpha) \log(\ell h^\lambda)$. Supongamos que se cumplen las condiciones descritas en la proposición 3.1, por lo que la economía presenta dos estados estacionarios interiores, $\{\ell_1^*, \nu_1, u_1^*, \left(\frac{k}{h}\right)_1^*, \left(\frac{c}{k}\right)_1^*\}$ y $\{\ell_2^*, \nu_2, u_2^*, \left(\frac{k}{h}\right)_2^*, \left(\frac{c}{k}\right)_2^*\}$. El primer estado estacionario presenta una menor proporción de capital físico, $\left(\frac{k}{h}\right)_1^* < \left(\frac{k}{h}\right)_2^*$.

Entonces,

- (a) Los tiempos asignados al estudio son menores en el estado estacionario intensivo en capital físico ($1 - u_2^* - \ell_2^* < 1 - u_1^* - \ell_1^*$), por lo que la tasa de crecimiento también es menor ($\nu_2 < \nu_1$).

- (b) *El trabajo es mayor en el estado estacionario intensivo en capital físico ($u_1^* > u_2^*$).*
- (c) *El nivel de ocio es mayor en el estado estacionario intensivo en capital físico ($\ell_2^* > \ell_1^*$).*
- (d) *Las proporciones de consumo por unidad de capital físico y consumo por unidad de capital humano son mayores en el estado estacionario de mayor crecimiento, $\left(\frac{c}{k}\right)_1^* > \left(\frac{c}{k}\right)_2^*$ y $\left(\frac{c}{h}\right)_1^* > \left(\frac{c}{h}\right)_2^*$.*

3.2. Dinámica Global: Modelo con Ocio no Cualificado

En este apartado estudiaremos el caso particular en el que el nivel de ocio no afecta a la función de utilidad ($\lambda = 0$). Como se analizó en la ecuación (3.13), el grado de concavidad de la expresión cuadrática (3.12) es máximo, y por tanto el modelo presentará multiplicidad de estados estacionarios para un rango considerable de los demás parámetros. Como se observará en el análisis, los distintos estados estacionarios presentan diferentes valores de asignaciones de tiempo a las tres actividades, y la dinámica global de transición a los mismos implica una modificación paulatina de los tiempos asignados al ocio, trabajo y estudio. Algunos de estos resultados y ejemplos han sido previamente incluidos en el artículo de Ladrón de Guevara *et. al.* (1995). En esta sección se enfatiza el estudio del comportamiento de las distintas variables en el proceso de transición al (a los) estado(s) estacionario(s) para cada uno de los posibles casos presentados.

Cuando la economía presenta múltiples estados estacionarios, si en la transición nos encontramos convergiendo al estado estacionario frontera, la asignación al estudio decrecerá paulatinamente a medida que aumenta la proporción de capital físico a capital humano, y la tasa de crecimiento en términos per cápita decrecerá como consecuencia de una menor asignación al estudio. Eventualmente, en el largo plazo los agentes no invertirán en capital humano y la economía alcanzará un estado estacionario con decrecimiento continuado originado por la tasa de depreciación del capital humano. Si asumimos que el capital humano no se deprecia y que los conocimientos se transfieren entre dinastías sin

necesidad de inversión en capital humano, la economía alcanzará un estado estacionario con crecimiento cero, pero si asumimos algún grado de depreciación del conocimiento, la productividad del trabajo se irá reduciendo de manera continuada hasta converger al estado estacionario sin inversión en capital humano y con decrecimiento sostenido a la tasa de depreciación del mismo, $\nu = -\theta$.

Como se demuestra en Ladrón de Guevara *et. al.* (1995), aunque el problema de optimización no sea globalmente cóncavo en controles y estados, la concavidad de la función objetivo respecto de las variables de control es condición suficiente para demostrar que las trayectorias de convergencia al (a los) estado(s) estacionario(s) localmente estable(s) construidas por el sistema de condiciones de primer orden constituyen las soluciones al problema (P'), siempre y cuando otra trayectoria de convergencia no registre mayores valores de la función objetivo. Este sería el caso en el que se dan múltiples estados estacionarios y el estado estacionario localmente inestable presenta raíces complejas conjugadas. En este caso, los segmentos de las trayectorias que registren el máximo valor de la función objetivo del problema (P') serán óptimos. Como se ilustrará en próximos ejemplos, si los estados estacionarios localmente inestables presentan raíces complejas conjugadas, la construcción de las trayectorias óptimas implicará comportamientos cíclicos localizados alrededor del estado estacionario localmente inestable. Para un rango de valores de la variable de estado $\frac{k(0)}{h(0)}$ en cuyo interior se encuentra el valor correspondiente al estado estacionario localmente inestable, se presentan diversas trayectorias. Para la condición inicial $\frac{k(0)}{h(0)} = \left(\frac{k}{h}\right)_2^*$ alguna de las trayectorias que converge a algún estado estacionario estable presenta mayores valores de la función objetivo que el propio estado estacionario inestable, y por tanto este último no es óptimo. Si por el contrario, el estado estacionario localmente inestable presenta solamente raíces reales, existe una única trayectoria y dicho estado es también óptimo.

Si la economía presenta un único estado estacionario, el mismo puede ser interior o no interior. Como se observó en las figuras 1, 2 y 3 para el modelo general, si el parámetro de productividad de la función de producción de capital humano, δ , no es lo

suficientemente alto como para permitir crecimiento sostenido de la economía, la misma presenta un único estado estacionario no interior sin estudio. En el caso de la función de utilidad aditivamente separable, el lado izquierdo de la desigualdad (a) de la proposición 3.2 depende positivamente del parámetro de productividad. De dicha desigualdad se deduce que cuando la productividad marginal del estudio por unidad de capital humano es inferior a un cierto valor, $\delta < (\rho - n) \left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha} + 2\sqrt{\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)}} \right] - \pi - n + \theta$, el discriminante de la ecuación cuadrática (3.14) es negativo y la economía no presenta estados estacionarios interiores. En este caso, independientemente de las condiciones iniciales, la economía convergerá en el largo plazo al estado frontera sin inversión en capital humano y con decrecimiento a la tasa $\nu = -\theta$.

Al igual que en el modelo más general, en el modelo con ocio no cualificado el subespacio de parámetros que implica multiplicidad de estados estacionarios está delimitado por las condiciones de existencia e interioridad de las dos soluciones de la ecuación (3.12). La figura 4 muestra en el plano (β, σ) las distintas regiones que delimitan las condiciones antes descritas, para valores de los demás parámetros $\alpha=0.3$, $\rho=0.05$, $n=0$, $A=1$, $\pi=0$, $\delta=0.23$ y $\theta=0$. Las condiciones dividen al diagrama en cuatro regiones. La región A está constituida por aquellas economías con un único estado estacionario interior. En esta región el nivel de ocio determinado por la segunda raíz de la ecuación (3.12) implica un valor negativo del estudio. Partiendo de esta región incrementos del parámetro β reducen el valor de la segunda raíz. Para un valor de β por encima del nivel $\hat{\beta}$ la segunda raíz satisface las condiciones de interioridad, y la región D corresponde por tanto a las economías con múltiples estados estacionarios. A medida que incrementamos el valor de β el discriminante de la ecuación (3.12) se reduce y los dos estados estacionarios interiores se acercan. En la región B el discriminante se vuelve negativo y la economía no presenta estados estacionarios interiores. En esta región las economías convergen paulatinamente a un único estado estacionario frontera globalmente estable sin inversión en capital humano. La región C se descarta del análisis, ya que con un valor de $\sigma < \hat{\sigma}$ al menos uno de los estados estacionarios interiores no cumple la condición de transversalidad, $\rho - n -$

$$\alpha(1 - \sigma)\nu > 0.$$

Con la misma parametrización, la figura 5 muestra cómo varía la región de múltiples estados estacionarios para distintos valores de α . Incrementos del parámetro α desplazan la región a la derecha, y se corresponden con incrementos del parámetro β . A pesar de que la región de múltiples estados estacionarios se amplía al reducirse el parámetro σ , podemos encontrar economías con valores de los parámetros relativamente realistas, es decir, con α , β y σ próximos a 0.3, 0.35 y 1 respectivamente. A continuación estudiaremos una economía representativa dentro de esta región y analizaremos su dinámica (punto **a** en la figura 4).

Ejemplo 1. *Función de utilidad multiplicativamente separable*, $U(c, \ell) = \frac{(c^\alpha \ell^{1-\alpha})^{1-\sigma}}{1-\sigma}$.

En este ejemplo consideramos los siguientes valores de los parámetros:

$$\sigma=0.906, \alpha=0.3, \rho=0.05, n=0, A=1, \beta=0.355, \pi=0, \delta=0.23, \theta=0.$$

Para estos valores de los parámetros la ecuación (3.12) tiene dos raíces, $\ell_1^*=0.698$, y $\ell_2^*=0.772$. Ambos valores satisfacen tanto la condición de transversalidad como las condiciones de interioridad de los usos del tiempo descritas en la proposición 3.1. Por tanto la economía presenta dos estados estacionarios interiores. Como se ha explicado anteriormente, esta economía presenta además un tercer estado estacionario frontera con asignaciones de tiempo exclusivamente al trabajo y al ocio, sin inversión en capital humano. Este tercer estado estacionario se calcula desarrollando el modelo e imponiendo la condición frontera $(1 - u(t) - \ell(t) = 0)$ en la ecuación (2.9) (ver la parte I de Apéndice). En este ejemplo el tiempo asignado a las distintas tareas y las tasas de crecimiento de la economía registran valores razonables para los tres estados estacionarios. Estos valores son los siguientes:

Primer estado estacionario:

$$\left(\frac{c}{h}\right)_1^*=0.473, \ell_1^*=.698, u_1^*=0.215, \left(\frac{k}{h}\right)_1^*=2.694, \text{ y } \nu_1=0.020$$

Segundo estado estacionario:

$$\left(\frac{c}{h}\right)_2^* = 0.612, \ell_2^* = .772, u_2^* = 0.217, \left(\frac{k}{h}\right)_2^* = 4.214, \text{ y } \nu_2 = 0.003$$

Tercer estado estacionario

$$\left(\frac{c}{h}\right)_3^* = 0.637, \ell_3^* = .783, u_3^* = 0.217, \left(\frac{k}{h}\right)_3^* = 4.522, \text{ y } \nu_3 = 0.$$

Para analizar la dinámica global del sistema estudiaremos las soluciones del sistema de ecuaciones de Euler que convergen al(a los) estado(s) estacionario(s) localmente estable(s). Si eliminamos las covariables de estado del sistema de ecuaciones (3.1)-(3.5), junto con las dos ecuaciones de acumulación de ambos capitales (2.8) y (2.9) obtenemos el siguiente sistema que rige la dinámica de convergencia a los estados estacionarios localmente estables:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} &= (1 - \alpha)(1 - \sigma)(\delta u(t) + \pi + n) + A\beta \left(\frac{k(t)}{u(t)h(t)}\right)^{\beta-1} [\sigma + \alpha(1 - \sigma)] - \\ &\quad - \rho - \pi + (1 - \sigma)\nu \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\beta \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = (1 - \beta)(\pi + n - \theta) + \delta(1 - \beta)(1 - \ell(t)) + \beta\delta u(t) - \beta \left(\frac{c(t)}{k(t)}\right) \quad (3.20)$$

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = A \left(\frac{k(t)}{u(t)h(t)}\right)^{\beta-1} - (\pi + n) - \left(\frac{c(t)}{k(t)}\right) \quad (3.21)$$

$$\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = \delta(1 - u(t) - \ell(t)) - \theta \quad (3.22)$$

donde el nivel de ocio $\ell(t)$, que aparece en las ecuaciones (3.20) y (3.22) es función de las demás variables del sistema:

$$\ell(t) = \frac{(1 - \alpha)u(t)}{\alpha A(1 - \beta)} \left(\frac{c(t)}{k(t)}\right) \left(\frac{k(t)}{u(t)h(t)}\right)^{1-\beta} \quad (3.23)$$

Con el sistema de ecuaciones (3.19)-(3.23) podemos obtener las sendas óptimas. Para ello seguimos las técnicas numéricas estándar para construir las trayectorias estables del

sistema con un grado de precisión arbitraria. Linealizamos el sistema alrededor del estado estacionario interior localmente estable (primer estado estacionario) y retrocedemos en el tiempo en ambas direcciones a lo largo de la dirección de convergencia, correspondiente al autovector asociado al único autovalor negativo. De esta manera construimos las sendas de convergencia de la economía al primer estado estacionario. Al retroceder en el tiempo en el sentido en el que se incrementa la variable de estado $\left(\frac{k(t)}{h(t)}\right)$ la senda convergerá al segundo estado estacionario localmente inestable, y la manera en que se converja dependerá de la estructura de los autovalores del sistema linealizado alrededor de dicho estado.

Ya que el tercer estado es frontera, la dinámica de convergencia al mismo viene determinada por las ecuaciones de Euler del modelo sin inversión en capital humano, desarrollado en la parte I del Apéndice. Este sistema es compatible con las ecuaciones (3.19), (3.21), (3.22) y (3.23). Sin embargo, en la dinámica de convergencia sin estudio la ecuación (3.20) del sistema con estudio no se cumple en los alrededores del estado estacionario frontera. Para construir la senda óptima que converge al estado frontera es necesario por tanto retroceder en la dinámica sin estudio (véase la parte I del Apéndice) hasta que se cumpla con igualdad la ecuación (3.20) del sistema correspondiente al modelo con estudio. En ese instante seguiremos retrocediendo en el tiempo con las ecuaciones de Euler (3.19)-(3.23) para construir el tramo de senda correspondiente a asignaciones con valores de estudio estrictamente positivos. Al igual que en la senda proveniente del primer estado estacionario, el comportamiento en la vecindad del estado estacionario inestable dependerá de la estructura de los autovalores del sistema linealizado en dicho estado.

Las figuras 6 y 7 muestran la dinámica global de las distintas variables a lo largo de las sendas de convergencia a los estados estacionarios localmente estables para una economía con los parámetros correspondientes al ejemplo 1. Estos estados estacionarios son soluciones óptimas al problema del planificador central, y por tanto constituyen sendas de crecimiento equilibrado. Sin embargo, al linealizar la dinámica del sistema alrededor del estado estacionario inestable se obtienen dos raíces complejas conjugadas. Como se explicó anteriormente, el estado intermedio no es óptimo, y la función de política muestra

una discontinuidad en el punto **a** de la figura 6. Para encontrar este punto es necesario computar la función objetivo para las dos sendas que convergen a los estados estacionarios localmente estables. De esta manera determinamos dicho punto, donde se igualan ambas funciones. Para proporciones de capital físico a capital humano por encima del punto de discontinuidad la economía convergerá al estado estacionario frontera, y para proporciones inferiores convergerá al primer estado estacionario con mayor crecimiento.

Como se comentó previamente, dependiendo de los valores de los parámetros podemos también encontrar ejemplos de multiplicidad de estados estacionarios en los que los tres constituyen sendas de crecimiento equilibrado:

Ejemplo 2:

$$\sigma=0.995, \alpha=0.34, \rho=0.05, n=0, A=1, \beta=0.3496, \pi=0, \delta=0.1992, \theta=0.$$

Primer estado estacionario:

$$\left(\frac{c}{h}\right)_1^*=0.697, \ell_1^*=0.742, u_1^*=0.251, \left(\frac{k}{h}\right)_1^*=4.782, \text{ y } \nu_1=0.0014$$

Segundo estado estacionario:

$$\left(\frac{c}{h}\right)_2^*=0.701, \ell_2^*=0.744, u_2^*=0.251, \left(\frac{k}{h}\right)_2^*=4.836, \text{ y } \nu_2=0.0010$$

Tercer estado estacionario

$$\left(\frac{c}{h}\right)_3^*=0.714, \ell_3^*=0.749, u_3^*=0.251, \left(\frac{k}{h}\right)_3^*=4.991, \text{ y } \nu_3=0.$$

En este caso el estado estacionario intermedio es óptimo. Al linealizar la dinámica del modelo alrededor de dicho estado estacionario obtenemos raíces reales y positivas, por lo que la construcción de las sendas retrocediendo en el tiempo y partiendo de los estados estacionarios localmente estables converge uniformemente al estado estacionario inestable. En este caso la función de política no presenta ninguna discontinuidad, y el estado estacionario inestable coincide con la proporción crítica que separa las dos sendas de convergencia a los estados estacionarios localmente estables. Si la variable de estado



es inferior al valor del segundo estado estacionario, $\left(\frac{k_0}{h_0}\right) < \left(\frac{k}{h}\right)_2^*$, la economía convergerá al primer estado inestable, pero si la proporción inicial es superior, la economía incrementará paulatinamente su proporción de capital físico, reduciendo la asignación al estudio, y alcanzando eventualmente la trayectoria frontera ($u(t) + \ell(t) = 1$) de convergencia al estado estacionario sin crecimiento. La dinámica global de la economía se ilustra en las figuras 8 y 9.

A continuación desarrollaremos dos ejemplos de combinaciones de parámetros dentro de las regiones A y B de la figura 4 que se corresponden con economías con un único estado estacionario interior o frontera respectivamente.

En la región A de la figura 4 el modelo presenta un único estado estacionario interior globalmente estable. Para cualquier valor de la variable de estado $\left(\frac{k_0}{h_0}\right)$ la dinámica convergerá al único estado estacionario interior. La función de política y la dinámica de las distintas variables se muestran en las figuras 10 y 11 respectivamente, para el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3:

$$\sigma=1, \alpha=0.3, \rho=0.05, n=0, A=1, \beta=0.25, \pi=0, \delta=0.23, \theta=0.$$

Estado estacionario:

$$\left(\frac{c}{h}\right)_1^*=0.2684, \ell_1^*=0.5989, u_1^*=0.2174, \left(\frac{k}{h}\right)_1^*=0.8213, \text{ y } \nu_1=0.0423$$

En este caso existe una proporción crítica de la variable de estado, que denotaremos $\widehat{\frac{k}{h}}$, por debajo de la cual la economía se halla en la frontera, y en la trayectoria de convergencia al estado estacionario interior no se invierte en el segundo sector. En este tramo el capital físico es escaso en proporción al capital humano y por tanto el consumo por unidad de capital humano, $\frac{c(t)}{h(t)}$ es pequeño. Los agentes invierten solamente en el primer sector, y no asignan ninguna fracción de su dotación de tiempo al estudio ($u(t) + \ell(t) = 1$). El capital humano se deprecia por tanto a la tasa $-\theta$ y la proporción $\frac{k(t)}{h(t)}$ se incrementa

rápidamente hasta llegar a la proporción crítica $\widehat{\frac{k}{h}}$, donde se comienza a invertir en el sector de capital humano. La velocidad de convergencia al estado estacionario comienza a reducirse paulatinamente a medida que se incrementa la asignación de tiempo al estudio y se reduce el trabajo. Los valores de las distintas variables van aproximándose a los de estado estacionario.

Si por el contrario, la economía se encuentra en una condición inicial $\frac{k_0}{h_0} > \widehat{\frac{k}{h}}$ la asignación de tiempo al trabajo es inferior a la de estado estacionario y la del estudio superior, por lo que la proporción $\frac{k_0}{h_0}$ se va reduciendo paulatinamente convergiendo junto con las demás variables en el largo plazo al estado estacionario.

En la región B de la figura 4 el modelo no presenta estados estacionarios interiores. La economía en el largo plazo convergerá al único estado estacionario frontera sin inversión en capital humano. La función de política y la dinámica de las variables se observan en las figuras 12 y 13 para el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4:

$$\sigma=1, \alpha=0.3, \rho=0.05, n=0, A=1, \beta=0.5, \pi=0, \delta=0.23, \theta=0.$$

Estado estacionario:

$$\left(\frac{c}{h}\right)_1^*=1.7647, \ell_1^*=0.8235, u_1^*=0.1765, \left(\frac{k}{h}\right)_1^*=17.6471, \text{ y } \nu_1=0$$

Como se estudió previamente, para valores bajos del parámetro de productividad marginal de las unidades eficientes de producción en el segundo sector, δ , la economía no logra alcanzar un estado estacionario interior. Si partimos de una proporción baja de capital físico por unidad de capital humano, $\frac{k_0}{h_0} < \widehat{\frac{k}{h}}$ (ver figura 12), los agentes asignan fracciones de tiempo a ambos sectores, pero a medida que se incrementa la proporción de capital físico, aumentan rápidamente los niveles de consumo y ocio, y eventualmente dejan de invertir en el segundo sector. Cuando la variable de estado llega al valor crítico $\widehat{\frac{k}{h}}$, la economía alcanza la frontera y no se asigna tiempo de estudio. Esto origina un

decremento paulatino de la proporción de capital humano, que se deprecia entonces a la tasa $-\theta$ y eventualmente la economía alcanza el estado estacionario no interior en el que se decrece a dicha tasa.

3.3. Función de utilidad aditivamente separable:

A continuación estudiaremos el caso particular de la función aditivamente separable: $U(c, \ell) = \alpha \log(c) + (1 - \alpha) \log \ell$. Como bien se sabe, esta función de utilidad constituye el caso límite de la forma funcional multiplicativamente separable, $U(c, \ell) = \frac{(c^\alpha \ell^{1-\alpha})^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$, para $\sigma=1$. La ausencia de efectos cruzados entre ocio y consumo simplifican los cálculos de las soluciones. En este apartado se caracterizarán analíticamente las condiciones que deben cumplir los parámetros del modelo para que se presente cada una de las dinámicas comentadas anteriormente. Las condiciones de primer orden del modelo quedan:

$$\varphi_1(t) = \frac{\alpha}{c(t)} \quad (3.24)$$

$$\delta h(t) \varphi_2(t) = \frac{(1 - \alpha)}{\ell(t)} \quad (3.25)$$

$$\delta \varphi_2(t) = \varphi_1(t) F_L(k(t), u(t)h(t)) \quad (3.26)$$

$$\frac{\dot{\varphi}_1(t)}{\varphi_1(t)} = \pi + \rho + \nu - F_k(k(t), u(t)h(t)) \quad (3.27)$$

$$\frac{\dot{\varphi}_2(t)}{\varphi_2(t)} = \rho - n + \theta + \nu - \delta(1 - \ell(t)) \quad (3.28)$$

$$\dot{k}(t) = F[k(t), u(t)h(t)] - (\pi + n + \nu)k(t) - c(t) \quad (3.29)$$

$$\dot{h}(t) = \delta h(t)(1 - u(t) - \ell(t)) - (\theta + \nu)h(t) \quad (3.30)$$

De dicho sistema de condiciones de primer orden, eliminando las covariables de estado e imponiendo estacionariedad, obtenemos las ecuaciones que deben cumplir las sendas de crecimiento equilibrado:

$$\frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{u^*}{\ell^*} \left(\frac{c}{k} \right)^* = \left(\frac{uh}{k} \right)^* F_L \left(1, \left(\frac{uh}{k} \right)^* \right) \quad (3.31)$$

$$\pi + \rho + \nu = F_K \left(1, \left(\frac{uh}{k} \right)^* \right) \quad (3.32)$$

$$\rho - n = \delta u^* \quad (3.33)$$

$$F \left(1, \left(\frac{uh}{k} \right)^* \right) = \left(\frac{c}{k} \right)^* + (\pi + n + \nu) \quad (3.34)$$

$$1 - u^* - \ell^* = \left(\frac{\theta + \nu}{\delta} \right) \quad (3.35)$$

A partir de las ecuaciones anteriores podemos establecer los siguientes resultados de existencia y multiplicidad de estados estacionarios:

Proposición 3.4: *Consideremos el problema de optimización (P'), donde:*

La función de producción $F(K, L)$ es C^2 , creciente, cóncava, linealmente homogénea, y satisface las condiciones de Inada (2.2). Además, $F_{KK}(K, L) < 0$ y $F_{LL}(K, L) < 0$ para cualquier vector positivo (K, L) .

La función de utilidad $U(c, \ell)$ es aditivamente separable, creciente, cóncava y logarítmica en consumo y ocio, $U(c, \ell) = \alpha \log c + (1 - \alpha) \log \ell$, con $0 < \alpha < 1$.

Asumimos que $\rho - n > 0$. Entonces, las siguientes condiciones son necesarias y suficientes para garantizar la existencia de al menos un estado estacionario interior, $\left\{ \left(\frac{c}{h} \right)^, \ell^*, u^*, \left(\frac{k}{h} \right)^*, \nu \right\}$:*

(a) $0 \in (\min_{0 < \ell < 1} f(\ell), \max_{0 < \ell < 1} f(\ell))$, donde

$$\begin{aligned} f(\ell) = & \frac{\rho - n}{\delta} \left\{ F \left[F_K^{-1} \left[\rho + \pi - \theta + \delta \left(1 - \frac{\rho - n}{\delta} - \ell \right) \right] \right] - \delta \left(1 - \frac{\rho - n}{\delta} - \ell \right) - n - \pi + \theta \right\} - \\ & - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ell F_L \left[F_K^{-1} \left[\rho + \pi - \theta + \delta \left(1 - \frac{\rho - n}{\delta} - \ell \right) \right] \right] F_K^{-1} \left[\rho + \pi - \theta + \delta \left(1 - \frac{\rho - n}{\delta} - \ell \right) \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

(b) Para algún ℓ^* que satisfaga la condición anterior se debe cumplir que $\ell^* < \frac{\delta - \rho + n}{\delta}$.

Además, el número de estados estacionarios interiores es igual al número de soluciones ℓ^* de la ecuación $f(\ell^*) = 0$ que satisfacen la condición (b).

Para la tecnología Cobb-Douglas, $F(k, uh) = Ak^\beta (uh)^{1-\beta}$, $A > 0$, $0 < \beta < 1$, la ecuación $f(\ell^*) = 0$ tiene la siguiente formulación cuadrática:

$$\left[\frac{\delta(1-\ell)(1-\beta)}{\beta} + \frac{(1-\beta)}{\beta} (\pi + n - \theta) + \rho - n \right] \left[\frac{\rho-n}{\delta} \right] - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \ell [(1-\ell) \delta + n + \pi - \theta] = 0 \quad (3.37)$$

La ecuación cuadrática anterior puede tener dos raíces positivas, $1 > \ell_2 > \ell_1 > 0$:

$$\frac{\left[\frac{1-\alpha}{\alpha} (\rho-n) + \delta + n + \pi - \theta \right] \pm \left(\left[\frac{1-\alpha}{\alpha} (\rho-n) + \delta + n + \pi - \theta \right]^2 - 4 \frac{(1-\alpha)}{\alpha} (\rho-n) \left[\left[\frac{\beta}{1-\beta} (\rho-n) + \delta + n + \pi - \theta \right] \right] \right)^{\frac{1}{2}}}{2\delta} \quad (3.38)$$

Para garantizar la interioridad de los estados estacionarios, las raíces deben además cumplir la condición (b) de la proposición 3.4. Ya que de la ecuación (3.33) el nivel de trabajo para cualquier estado estacionario es $u^* = \frac{\rho-n}{\delta}$, la condición $\ell^* \in \left[0, \frac{\delta-\rho+n}{\delta} \right]$ garantiza la interioridad del mismo.

Las distintas dinámicas quedan por tanto caracterizadas por las condiciones descritas en la siguiente proposición, cuya demostración se obtiene imponiendo interioridad para los tiempos obtenidos con las soluciones de la ecuación (3.37):

Proposición 3.5: *Consideremos el problema de optimización (P') , donde la función de producción es Cobb-Douglas, $F(k, uh) = Ak^\beta (uh)^{1-\beta}$, la función de utilidad es aditivamente separable en consumo y ocio, $U(c, \ell) = \alpha \log(c) + (1 - \alpha) \log(\ell)$, $0 < \alpha < 1$, y asumimos que se cumple $0 < \rho - n < \delta$. Entonces,*

- (a) Si $\frac{\beta}{(1-\beta)} < \frac{(\rho+\pi-\theta)(\alpha\delta-\rho+n)}{(1-\alpha)(\rho-n)^2}$, la economía presenta un único estado estacionario interior.
- (b) Si $\alpha > \frac{\rho-n}{\delta-\rho+\theta-\pi}$ y $\frac{(\rho+\pi-\theta)(\alpha\delta-\rho+n)}{(1-\alpha)(\rho-n)^2} < \frac{\beta}{1-\beta} < \frac{[(1-\alpha)(\rho-n)-\alpha(\delta+n+\pi-\theta)]^2}{4\alpha(1-\alpha)(\rho-n)^2}$ la economía presenta múltiples estados estacionarios.
- (c) En cualquier otro caso, la economía presenta un único estado estacionario no interior, sin asignación de tiempo al estudio.

Estos resultados se ilustran en la figura 14. Si fijamos los parámetros $\rho=0.05$, $n=0$, $A=1$, $\pi=0$, $\delta=0.25$ y $\theta=0$, en el plano (α, β) se presentan las regiones correspondientes a cada uno de los posibles casos. A medida que nos movemos en el área de múltiples estados estacionarios, creciendo en ambos parámetros, α y β , los estados estacionarios registran una mayor tasa de crecimiento per cápita. Dentro de esta región, a medida que nos acercamos a la cota superior los dos estados estacionarios interiores se juntan, ya que el discriminante de la ecuación cuadrática tiende a cero. Por encima de dicha cota el discriminante se hace negativo y los estados estacionarios interiores desaparecen. La economía presenta entonces un único estado estacionario no interior. Si nos movemos hacia la parte inferior de la región, nos acercamos a la condición de interioridad $(1 - \ell_2^* - u_2^*) > 0$, y por tanto el segundo estado estacionario inestable se acerca al tercer estado estacionario frontera, ya que el tiempo asignado al estudio en el segundo estado se reduce, y por tanto la tasa de crecimiento ν_2 se acercará a la tasa sin inversión en capital humano, $-\theta$. Traspasando la condición que acota inferiormente la región de múltiples estados estacionarios el modelo presentará un único estado estacionario interior globalmente estable. Si fijamos el valor de α en 0.3, los valores de β correspondientes a múltiples estados estacionarios parecieran ser relativamente altos, aunque no demasiado irrealistas. A continuación examinaremos un ejemplo con múltiples estados estacionarios (punto **b** de la figura 14).

Ejemplo 5: *Función de utilidad aditivamente separable, logarítmica en consumo y ocio:* $U(c, \ell) = \alpha \log(c) + (1 - \alpha) \log(\ell)$, $0 < \alpha < 1$:

$$\alpha=0.291, \rho=0.05, n=0, A=1, \beta=0.4, \pi=0, \delta=0.25, \theta=0.$$

En este caso la ecuación (3.37) contiene dos raíces, $\ell_1^*=0.7162$ y $\ell_2^*=0.771$. Ambas soluciones satisfacen la condición de interioridad (b) de la proposición 3.3 y por tanto la economía presenta dos estados estacionarios interiores. El tercer estado estacionario frontera, sin tiempo asignado a la educación, se corresponde con un nivel algo superior de ocio, $\ell_3^*=0.8024$. Las soluciones estacionarias vienen caracterizadas por los siguientes valores:

Primer estado estacionario:

$$\left(\frac{c}{h}\right)_1^*=0.5588, \ell_1^*=0.7162, u_1^*=0.2, \left(\frac{k}{h}\right)_1^*=3.5738, \text{ y } \nu_1=0.0209$$

Segundo estado estacionario:

$$\left(\frac{c}{h}\right)_2^*=0.6939, \ell_2^*=0.7710, u_2^*=0.2, \left(\frac{k}{h}\right)_2^*=5.1073, \text{ y } \nu_2=0.0072$$

Tercer estado estacionario

$$\left(\frac{c}{h}\right)_3^*=0.7904, \ell_3^*=0.8024, u_3^*=0.1976, \left(\frac{k}{h}\right)_3^*=6.3232, \text{ y } \nu_3=0.$$

Se puede observar que los tres estados estacionarios generan valores razonables respecto de las tasas de crecimiento per cápita de las economías, así como de los tiempos asignados a las distintas actividades. Los estados estacionarios 1 y 3 son ambas soluciones óptimas al problema del planificador central, pero el segundo estado estacionario no es óptimo. El comportamiento dinámico oscilatorio de las ecuaciones de Euler alrededor de dicho estado es por tanto similar al del ejemplo 1: existe una proporción crítica $\widehat{\frac{k}{h}}$ por encima de la cual las sendas óptimas de las variables convergerán al tercer estado estacionario y por debajo de la cual convergerán al primero

3.4. Calibración del Modelo:

En esta subsección reportamos los resultados de diversas calibraciones del modelo, para distintos grados de cualificación del ocio, ya que hasta la fecha no existen estudios que nos permitan estimar dicho parámetro. En todas las calibraciones se consideraron los parámetros tecnológicos $A=1$ y $\beta=0.36$, este último correspondiente a una participación del trabajo en la renta nacional de 64%, que se ajusta a la evidencia empírica de los Estados Unidos de América para el período de la postguerra. La tasa de depreciación, que oscila entre el 6.8% y el 7.7%, se fijó en cada caso para reproducir la proporción capital a producto de 2.6 registrada en la economía americana en dicho período. El descuento futuro se fijó en $\rho=0.04$, valor estándar usado en la literatura de crecimiento.

En la literatura se han estimado diversos valores del coeficiente de aversión al riesgo, σ , siempre superiores a la unidad. Friend y Blume (1975) estiman un valor cercano a 2. Entre otros muchos estudios posteriores podemos citar a Auerbach y Kotlikoff (1987), que estiman su valor en 4, y Hansen y Singleton (1983) que lo estiman cercano a la unidad. Siguiendo a R. Lucas (1990) fijamos su valor en $\sigma=2$.

La tasa de crecimiento, n , se asumió del 1.4% y el parámetro tecnológico en el sector de capital humano, δ , se fijó para que la economía presentara un crecimiento anual per cápita del 1.5%. Ambas tasas se corresponden con los datos de la economía de los Estados Unidos de América entre 1955 y 1985. No se consideró depreciación en el sector de capital humano.

Finalmente, la participación del consumo en la función de utilidad, α , se fijó para obtener una asignación de horas trabajadas en estado estacionario de $\frac{1}{3}$, consistente con las observaciones en el mercado de trabajo americano para el período antes descrito.

Los valores de estado estacionario se presentan en la tabla 1.

λ	α	π	δ	ν	u^*	ℓ^*	$\left(\frac{k}{h}\right)^*$	$\left(\frac{c}{h}\right)^*$
0	0.42	0.077	0.0977	0.015	0.33	0.5154	1.474	0.410
0.25	0.44	0.075	0.0774	0.015	0.33	0.4770	1.460	0.411
0.5	0.46	0.073	0.0668	0.015	0.33	0.4456	1.462	0.415
0.75	0.48	0.070	0.0604	0.015	0.33	0.4183	1.489	0.424
1	0.49	0.068	0.0560	0.015	0.33	0.4016	1.479	0.423

Tabla 1. Valores de estado estacionario para diversos grados de cualificación del ocio y $\sigma=2$, $\rho=0.04$, $n=0.014$, $A=1$, $\beta=0.36$ y $\theta=0$.

En todos los casos el modelo presenta un único estado estacionario interior globalmente estable. Es notorio el hecho de que, a pesar de que el parámetro λ varía en todo el rango posible, los valores de estado estacionario son bastante similares para las diversas calibraciones, lo cual garantiza la robustez del modelo calibrado para diversos grados de cualificación del ocio.

4. Modelo con Costes de Ajuste

En esta sección se desarrollará el modelo con ocio cualificado ($\lambda = 1$) incluyendo el término de costes de ajuste en la restricción de acumulación de capital físico. En las parametrizaciones de la sección anterior se constató que el grado de cualificación del ocio en el modelo sin costes de ajuste no afecta significativamente las proporciones de estado estacionario (ver tabla 1). Se consideró el caso de ocio cualificado porque, como se demostrará posteriormente, garantiza la unicidad del estado estacionario. Sin embargo, un análisis similar al presentado se puede desarrollar con la formulación más general que contempla diversos grados de cualificación del ocio. Como se verá en el análisis posterior, el parámetro de los costes de ajuste desincentiva la inversión en este primer sector, afectando negativamente el nivel de estado estacionario de inversión en capital físico. Como consecuencia, las proporciones de consumo y capital físico por unidad de capital humano se reducen al incrementar el valor del parámetro de costes de ajuste, ϕ . Sin embargo, la inversión en el sector de capital humano queda inalterada. La asignación de tiempo a este segundo sector es independiente del nivel de los costes de ajuste, y por tanto el estudio y la tasa de crecimiento de largo plazo no se ven afectados.

La especificación incluyendo costes de ajuste en la acumulación de capital físico afecta de manera drástica la dinámica de convergencia al estado estacionario. Como se previó, esta velocidad de convergencia es altamente sensible a la magnitud de los costes de ajuste. Como se verá más adelante, para valores estándar de los demás parámetros del modelo, un incremento del parámetro de costes de ajuste correspondiente a una reducción de menos del 1% en la proporción capital físico a capital humano $\left(\frac{k(t)}{h(t)}\right)$ es capaz de incrementar en un 42% el tiempo de vida media (tiempo en reducir a la mitad la distancia al estado estacionario).

A continuación, con los procedimientos estándar previamente usados en las secciones

anteriores, se determinarán los valores de estado estacionario y el sistema de ecuaciones diferenciales que rige la dinámica. Una vez descontada la tasa de crecimiento de estado estacionario en las variables per cápita, el problema (P) de la sección 2 con ocio cualificado se puede expresar de la siguiente manera:

$$(P') \quad W_{(k_o, h_o)} = \underset{c(t), \ell(t), u(t)}{Max} \int_{t=0}^{\infty} \frac{1}{1-\sigma} \left[c(t)^\alpha (\ell(t)h(t))^{1-\alpha} \right]^{1-\sigma} e^{-\{\rho-n-\nu(1-\sigma)\}t} dt$$

s.a.

$$\dot{k}(t) = F[k(t), u(t)h(t)] - (\pi + n + \nu)k(t) - \phi k(t) \left(\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} + n + \nu \right)^2 - c(t) \quad (4.1)$$

$$\dot{h}(t) = \delta h(t) (1 - u(t) - \ell(t)) - (\theta + \nu)h(t) \quad (4.2)$$

$$c(t) \geq 0, \quad k(t) \geq 0, \quad h(t) \geq 0$$

$$\ell(t) \geq 0, \quad u(t) \geq 0, \quad \ell(t) + u(t) \leq 1$$

$$k_0, \quad h_0 \text{ dados}$$

Al igual que en la sección anterior, para facilitar el estudio de la dinámica consideraremos una tecnología Cobb-Douglas, $F(K(t), L(t)) = AK(t)^\beta L(t)^{1-\beta}$. En esta formulación del problema la derivada del capital físico aparece elevada al cuadrado en la primera restricción, por lo que para determinar las condiciones de primer orden se requiere expresar (P') como un problema de programación lineal sin restricciones. Para ello eliminamos las variables de control $u(t)$ y $c(t)$. El problema queda formulado:

$$(P'') \quad W_{(k_o, h_o)} = \underset{\dot{k}(t), \dot{h}(t), \ell(t)}{Max} \int_{t=0}^{\infty} U[k(t), \dot{k}(t), h(t), \dot{h}(t), \ell(t)] e^{-[\rho-n-(1-\sigma)\nu]t} dt$$

donde

$$U[k(t), \dot{k}(t), h(t), \dot{h}(t), \ell(t)] = \frac{[c(t)^\alpha (\ell(t)h(t))^{1-\alpha}]^{1-\sigma}}{(1-\sigma)}$$

y

$$c(t) = Ak(t)^\beta \left[\left(1 - \ell(t) - \frac{\theta + \nu}{\delta} \right) h(t) - \frac{\dot{h}(t)}{\delta} \right]^{1-\beta} - (\pi + n + \nu) k(t) - \dot{k}(t) - \phi k(t) \left(\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} + n + \nu \right)^2$$

$$\begin{aligned} c(t) &\geq 0, \quad k(t) \geq 0, \quad h(t) \geq 0 \\ \ell(t) &\geq 0, \quad 1 - \frac{\theta + \nu}{\delta} - \ell(t) - \frac{\dot{h}(t)}{\delta h(t)} \geq 0, \quad 1 - \frac{\theta + \nu}{\delta} - \frac{\dot{h}(t)}{\delta h(t)} \leq 1 \\ k_0, h_0 &\text{ dados} \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden del problema anterior son:

$$\begin{aligned} U_{k(t)} &= \frac{dU_{k(t)}}{dt} - \{\rho - n - \nu(1 - \sigma)\} U_{k(t)} \\ U_{h(t)} &= \frac{dU_{h(t)}}{dt} - \{\rho - n - \nu(1 - \sigma)\} U_{h(t)} \\ U_{\ell(t)} &= 0 \end{aligned}$$

Conjuntamente con las restricciones (4.1) y (4.2), y la condición de transversalidad, $\rho - n - \nu(1 - \sigma) > 0$, las condiciones de primer orden nos permiten caracterizar las sendas óptimas de esta economía. Al desarrollar las dos primeras ecuaciones obtenemos dos ecuaciones diferenciales de segundo orden respecto de las variables $k(t)$ y $h(t)$ respectivamente. Transformamos el sistema en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, definiendo las inversiones netas en ambos capitales: $i_k(t) = \dot{k}(t)$, y $i_h(t) = \dot{h}(t)$. Finalmente obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \left(1 + 2\phi\nu + \frac{2\phi i_k(t)}{k(t)} \right) \left[\frac{[\alpha(1-\sigma)-1]\dot{c}(t)}{c(t)} + (1 - \alpha)(1 - \sigma) \left(\frac{\dot{\ell}(t)}{\ell(t)} + \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \right) + n - \rho + \nu(1 - \sigma) \right] = \\ = \pi + n + \nu - A\beta \left(\frac{k(t)}{u(t)h(t)} \right)^{\beta-1} - \phi \left(\frac{i_k(t)^2}{k(t)^2} - \nu^2 \right) - 2\phi \left(\frac{i_k(t)}{k(t)} - \frac{i_k(t)^2}{k(t)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{[\alpha(1-\sigma)-1]\dot{c}(t)}{c(t)} + (1 - \alpha)(1 - \sigma) \left(\frac{\dot{\ell}(t)}{\ell(t)} + \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \right) + n - \rho + \nu(1 - \sigma) \right] + \\ + \beta \left(\frac{i_k(t)}{k(t)} - \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} - \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \right) = -\delta \left(1 - \ell(t) - \frac{\theta + \nu}{\delta} \right) - \frac{\delta(1-\alpha)c(t)}{A\alpha(1-\beta)h(t)} \left(\frac{k(t)}{u(t)h(t)} \right)^{-\beta} \end{aligned}$$

(4.4)

$$A\alpha(1-\beta)\left(\frac{k(t)}{u(t)h(t)}\right)^\beta = \frac{(1-\alpha)c(t)}{\ell(t)h(t)} \quad (4.5)$$

$$A\left(\frac{k(t)}{u(t)h(t)}\right)^{\beta-1} = \frac{i_k(t)}{k(t)} + \phi\left(\frac{i_k(t)}{k(t)} + \nu\right)^2 + \frac{c(t)}{k(t)} + \pi + n + \nu \quad (4.6)$$

$$\frac{i_h(t)}{h(t)} = \delta(1 - u(t) - \ell(t)) - (\theta + \nu) \quad (4.7)$$

$$\dot{k}(t) = i_k(t) \quad (4.8)$$

$$\dot{h}(t) = i_h(t) \quad (4.9)$$

A diferencia de la extensión de la sección anterior, el modelo con costes de ajuste y ocio cualificado presenta a lo sumo, un único estado estacionario:

Proposición 4.1: *Consideremos el problema de optimización (P'), donde la función instantánea de utilidad es $U(c(t), \ell(t)h(t)) = \frac{1}{(1-\sigma)} [c(t)^\alpha (\ell(t)h(t))^{1-\alpha}]^{1-\sigma}$ y la tecnología en el sector de capital físico es Cobb-Douglas: $F(k(t), u(t)h(t)) = Ak(t)^\beta (u(t)h(t))^{1-\beta}$. La economía presenta a lo sumo un único estado estacionario.*

Demostración: Imponiendo estacionariedad al sistema de ecuaciones (4.3)-(4.9) podemos obtener los valores y proporciones de largo plazo para esta economía. Resolviendo el sistema de ecuaciones para las variables que definen dicho estado estacionario obtenemos:

$$\nu = \frac{\delta - \theta - (\rho - n)}{\sigma} \quad (4.10)$$

$$1 - u^* - \ell^* = \frac{\delta - (\rho - n) - (1 - \sigma)\theta}{\delta\sigma} \quad (4.11)$$

$$\beta A \left(\frac{k}{uh}\right)^{\beta-1} = \pi + \rho + \sigma\nu + \nu^2\phi + 2\nu\phi[\rho - n - (1 - \sigma)\nu] \quad (4.12)$$

$$\beta \left(\frac{c}{k}\right)^* = [1 + \phi\nu][\rho - n - (1 - \sigma)\nu] + (1 - \beta)[\pi + n + \nu(1 + \phi\nu)] \quad (4.13)$$

$$u^* = \frac{\rho - n - (1 - \sigma)\nu}{\left[\frac{1-\alpha}{A\alpha} \frac{\delta}{1-\beta} \left(\frac{c}{k}\right)^* \left(\frac{k}{uh}\right)^{1-\beta} + \delta \right]} \quad (4.14)$$

Con la ecuación (4.10) obtenemos la tasa de crecimiento endógeno para la economía en función de los parámetros del modelo. Como se observa, la misma no depende de ninguno de los parámetros relativos a la restricción tecnológica del sector del bien físico, por lo que en el largo plazo la economía crecerá a una tasa endógena independientemente del nivel de los costes de ajuste, la tecnología de capital físico y la tasa de depreciación del mismo. La ecuación (4.11) determina la asignación de tiempo al estudio. Las ecuaciones (4.12) y (4.13) nos dan las proporciones entre las variables $c(t)$, $h(t)$, y $k(t)$ en función de la tasa de crecimiento endógeno, ν . Finalmente, el trabajo se calcula con la ecuación (4.14), con lo que se concluye la demostración.

Con el sistema de condiciones de primer orden (4.3)-(4.9) podemos obtener las sendas de convergencia al estado estacionario. Para ello seguimos el mismo procedimiento de construcción de la sección anterior. Para cualquier valor de la variable de estado $\frac{k}{h}$ la trayectoria estable constituye la solución óptima del problema (P'). Para ello es condición suficiente que la función objetivo sea globalmente cóncava en los controles, aún cuando no necesariamente sea globalmente cóncava en controles y estados [véase Ladrón de Guevara *et. al.* (1995)]. En la parte II del apéndice se demuestra la concavidad global de la función objetivo respecto de los controles. Por tanto, las ecuaciones dinámicas (4.3) a (4.9) nos permiten construir las sendas óptimas de convergencia al único estado estacionario que presenta esta economía.

Para el estudio de la dinámica local, en el entorno del estado estacionario la aproximación lineal del sistema dinámico asegura que las variables converjan monotónicamente al valor de estado estacionario según la siguiente ecuación diferencial. Linealizando alrededor del estado estacionario, el sistema queda:

$$\begin{pmatrix} \frac{d(k(t)-k^*)}{dt} \\ \frac{d(h(t)-h^*)}{dt} \\ \vdots \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} k(t) - k^* \\ h(t) - h^* \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Dicho sistema se resuelve diagonalizando la matriz Z . El único autovalor negativo, η , rige la dinámica local de convergencia al estado estacionario, y la trayectoria de las variables en el entorno del estado estacionario viene determinada por la solución al sistema anterior:

$$\begin{aligned} k(t) - k^* &= e^{\eta t} (k_0 - k^*) \\ h(t) - h^* &= e^{\eta t} (h_0 - h^*) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para tener una idea de la velocidad de convergencia local se usa el "tiempo de vida media" que nos da el tiempo que tarda la economía en reducir a la mitad la diferencia entre los valores iniciales de las distintas variables y los valores de estado estacionario:

$$T_m = -\frac{\ln 2}{\eta}$$

Al igual que en Summers (1981), nuestra formulación de costes de ajuste permite encontrar una relación lineal entre la variable que en esta literatura se conoce como la q de Tobin y la proporción $\left(\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)}\right)$. En los apartados siguientes se determinará dicha relación, con el objeto de calibrar el parámetro de la función de costes de ajuste y posteriormente se analizará el comportamiento de la dinámica del modelo, comparándolo con la versión sin incluir costes de ajuste.

4.1. Calibración de la función de costes de ajuste:

Siguiendo a King y Rebelo (1993), determinaremos la expresión para la q marginal de Tobin correspondiente a la estructura de costes de ajuste planteada. Retomando la ecuación (2.3), la inversión bruta $\tilde{I}(t)$ se puede expresar en términos de los niveles de capital, $\tilde{K}(t)$, e inversión neta, $\tilde{K}(t)$:

$$\tilde{I}(t) = \tilde{K}(t) + \pi \tilde{K}(t) + \phi \frac{\left(\frac{\tilde{K}(t)}{\tilde{K}(t)}\right)^2}{\tilde{K}(t)}$$

Si definimos la variable $\tilde{Z}(t)$ como la inversión bruta equivalente (sin incluir el término de costes de ajuste),

$$\tilde{Z}(t) = \tilde{K}(t) + \pi \tilde{K}(t)$$

Podemos expresar la inversión bruta en términos de $\tilde{K}(t)$ y $\tilde{Z}(t)$:

$$\tilde{I}(t) = \tilde{Z}(t) \left[1 + \frac{\phi \left(\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)} - \pi \right)^2}{\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)}} \right] = \tilde{Z}(t) \left[1 + h \left(\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)} \right) \right]$$

La función $h(\cdot)$ se conoce en la literatura como función de costes de ajuste, y nos da la relación entre la proporción de la inversión bruta $\tilde{I}(t)$ correspondiente a los costes de ajuste, $\phi \frac{\left(\frac{\tilde{K}(t)}{\tilde{K}(t)}\right)^2}{\tilde{K}(t)}$, y la restante, destinada a reponer el capital depreciado y a incrementar el stock de capital, $\tilde{K}(t) + \pi \tilde{K}(t)$.

Para entender el desarrollo de las ecuaciones que permiten calibrar la función de costes de ajuste debemos definir primeramente la q de Tobin. Para ello formularemos un problema de maximización de beneficios de una empresa, consistente en decidir las sendas óptimas de inversión y trabajo, dados los precios del bien final, $p(t)$, del capital físico, $p_I(t)$,

y el salario de mercado, $w(t)$. La tasa instantánea de interés, r , se supone constante en $t \in [0, \infty)$. La empresa se enfrenta al siguiente problema de maximización:

$$V(0) = \underset{\substack{\tilde{Z}(t), \tilde{L}(t) \\ s.a.}}{\text{Max}} \int_{t=0}^{\infty} [p(t)Y(\tilde{K}(t), \tilde{L}(t)) - w(t)\tilde{L}(t) - p_I(t)\tilde{I}(t)] e^{-rt} dt$$

$$\dot{\tilde{K}}(t) = \tilde{Z}(t) - \pi\tilde{K}(t)$$

El hamiltoniano del problema queda:

$$H = \left\{ p(t)Y(\tilde{K}(t), \tilde{L}(t)) - w(t)\tilde{L}(t) - p_I(t)\tilde{Z}(t) \left[1 + h\left(\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)}\right) \right] \right\} e^{-rt} + \lambda(t) [\tilde{Z}(t) - \pi\tilde{K}(t)]$$

Una vez transformada la covariable de estado, las condiciones de primer orden del problema quedan:

$$w(t) = p(t)Y_L(\tilde{K}(t), \tilde{L}(t))$$

$$\lambda(t) = p_I(t) \left[1 + h\left(\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)}\right) + \left(\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)}\right) h'\left(\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)}\right) \right]$$

$$\dot{\lambda}(t) = (\pi + r)\lambda(t) - p(t)Y_K(\tilde{K}(t), \tilde{L}(t)) - p_I(t) \left(\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)}\right)^2 h'\left(\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)}\right)$$

de la segunda ecuación podemos determinar la relación entre el precio sombra del capital y el precio de mercado, lo cual se conoce en la literatura como la q marginal de Tobin:

$$\frac{\lambda(t)}{p_I(t)} = \left[1 + h\left(\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)}\right) + \left(\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)}\right) h'\left(\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)}\right) \right]$$

La literatura empírica basada en la teoría de la q de Tobin ha usado tradicionalmente la q media $\left(\frac{V(t)}{p_I(t)\tilde{K}(t)}\right)$ como variable "proxy" de la q marginal. Como demuestra Hayashi (1982), si la función de costes de ajuste es homogénea de grado cero en $\tilde{Z}(t)$ y $\tilde{K}(t)$, la q

marginal de Tobin coincide con la q media de Tobin. Esto permite utilizar las estimaciones existentes de la q media de Tobin para calibrar la función de costes de ajuste.

Para la formulación de costes de ajuste considerada, usando la ecuación anterior podemos obtener la senda de inversión óptima $\left(\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)}\right)$ como función lineal de la q de Tobin:

$$q(t) = 1 - 2\phi\pi + 2\phi \left(\frac{\tilde{Z}(t)}{\tilde{K}(t)} \right)$$

Tomaremos en consideración dos trabajos que han estimado los parámetros de la ecuación anterior para calibrar el modelo con costes de ajuste: L. Summers (1981) y F. Hayashi (1982). El último estima los parámetros π y ϕ en 14% y 11.82 respectivamente. Las estimaciones de los mismos en el artículo de L. Summers son de 8.8% y 16 respectivamente. Siguiendo a Summers, fijamos el parámetro ϕ en 16. Al igual que la sección anterior, en la que no se consideraban costes de ajuste, la depreciación del capital físico ($\pi = 0.068$) se fija para obtener una proporción capital a producción de 2.6. Los parámetros σ , α , ρ , n , A , β , δ y θ se ajustaron a los mismos valores de la sección anterior. De esta manera la economía a estudiar es la siguiente:

$$\sigma=2, \alpha=0.49, \rho=0.04, n=0.014, A=1, \beta=0.36, \pi=0.068, \phi=16, \delta=0.056 \text{ y } \theta=0.$$

Los valores de estado estacionario para la economía descrita antes son:

$$\nu=0.015, u^*=0.324, \ell^*=0.408, \left(\frac{k}{h}\right)^*=1.135, \left(\frac{c}{h}\right)^*=0.394$$

El autovalor negativo del sistema linealizado alrededor del estado estacionario es $\eta=-0.0359$, lo cual se corresponde con un tiempo de vida media de 19.31 años.

El parámetro de costes de ajuste, como se comentó previamente, afecta de manera significativa las velocidades de convergencia, aunque no así los valores de estado estacionario. Se realizaron simulaciones para diferentes valores del mismo (véase la tabla 2).

ϕ	ν	u^*	ℓ^*	$1-u^*-\ell^*$	$\left(\frac{k}{h}\right)^*$	$\left(\frac{c}{h}\right)^*$	q_{Tobin}^*	η	T_m
0	0.015	0.331	0.401	0.268	1.479	0.424	1	-0.2453	2.8257
0.1	0.015	0.330	0.402	0.268	1.476	0.423	1.006	-0.2241	3.0930
0.5	0.015	0.330	0.402	0.268	1.466	0.423	1.029	-0.1724	4.0206
2	0.015	0.329	0.403	0.268	1.427	0.420	1.116	-0.1051	6.5951
4	0.015	0.328	0.404	0.268	1.378	0.416	1.232	-0.0755	9.1808
16	0.015	0.324	0.408	0.268	1.135	0.394	1.928	-0.0359	19.3077

Tabla 2. Valores de estado estacionario y velocidades de convergencia para varios valores de ϕ , y $\sigma=2$, $\alpha=0.49$, $\rho=0.04$, $n=0.014$, $A=1$, $\beta=0.36$, $\pi=0.068$, $\delta=0.056$ y $\theta=0$.

En las figuras 15 y 16 se muestra la dinámica de convergencia global al estado estacionario para distintos valores del parámetro de costes de ajuste ϕ . Como se puede observar, un incremento de este parámetro, afecta significativamente las velocidades de convergencia (véase la figura 15). Si no se consideran costes de ajuste, ante una pérdida significativa de capital físico, la proporción entre el precio sombra del mismo y el del capital humano se incrementa significativamente respecto del valor de estado estacionario. Este desbalance incentiva la asignación de tiempo al trabajo y desincentiva el estudio (véase la figura 16). El tiempo asignado al sector del bien físico, $u(t)$, se incrementa de manera significativa y el estudio, $1 - u(t) - \ell(t)$, cae bruscamente. La tasa de crecimiento de la proporción capital físico a capital humano es alta, por lo que el desbalance se reduce rápidamente. En la medida en que la elasticidad del tiempo asignado al trabajo respecto de la pérdida de capital físico sea alta, la economía registrará tasas de crecimiento del capital físico muy superiores a la de estado estacionario, y la convergencia será sumamente rápida.

Se puede observar que el incremento de los costes de ajuste afecta esta dinámica. Las elasticidades de las asignaciones de tiempo a los dos sectores, $u(t)$ y $1 - u(t) - \ell(t)$, respecto de variaciones en la proporción entre ambos capitales, se reducen significativamente al incrementarse el parámetro de costes de ajuste. Ante el incremento de los mismos se reduce

el grado de sustitución entre ambos sectores y los agentes escogen sendas de convergencia más suaves. En la transición, las asignaciones de tiempo a los dos sectores no varían significativamente y como consecuencia el proceso de convergencia al estado estacionario es más lento. En las gráficas se observa sin embargo que el parámetro de costes de ajuste no afecta de manera significativa las sendas de las variables de decisión que derivan utilidad, es decir, el consumo por unidad de capital humano $\left(\frac{c(t)}{h(t)}\right)$ y el tiempo de ocio, $\ell(t)$ (véase la figura 16).

En los resultados obtenidos se puede observar la importancia de considerar costes de ajuste sobre la dinámica de transición del modelo. Los estudios empíricos sitúan al parámetro de convergencia, η , en el orden de -0.02, lo cual se corresponde con un tiempo de vida media de 34.66 años. Para la calibración del modelo sin considerar los costes de ajuste ($\phi = 0$), el autovalor negativo η vale -0.245, y la vida media es de sólo 2.83 años, mientras que con la función de costes de ajuste calibrada ($\phi = 16$), la vida media se incrementa a 19.31 años.

En la figura 17 se muestran, en tiempo discreto, las realizaciones anuales de tres versiones de la economía estudiada con distintos grados de costes de ajuste $\phi=16$, $\phi=2$ y $\phi=0.5$. Para pequeños niveles del parámetro de costes de ajuste la economía converge a los valores de estado estacionario muy rápidamente, no siendo posible que se registren períodos de más de 4 ó 5 años de crecimiento sostenido. Ante pérdidas significativas en el stock de capital físico las economías crecen sumamente rápido, pero la tasa de crecimiento cae bruscamente, convergiendo en pocos períodos al valor de estado estacionario. En la economía con mayor nivel de costes de ajuste, correspondiente a la calibración explicada, el proceso es lo suficientemente lento como para permitir crecimiento sostenido a una tasa superior a la de estado estacionario ante una pérdida significativa de capital físico. Ante una pérdida del 50% del capital físico el modelo calibrado puede predecir períodos prolongados (de 10 a 20 años) con tasas de crecimiento significativamente superiores a la de estado estacionario. Sin embargo, ninguna de las simulaciones de la tabla 2 es capaz de predecir los milagros registrados por economías como la de Japón o Corea del Sur en

las décadas de los 60 y los 70, con tasas sostenidas del 7% anual. A pesar de la limitación planteada, el comportamiento del modelo, en cuanto a la velocidad de convergencia se ajusta bastante a la evidencia empírica, que muestra un proceso de convergencia entre países sumamente lento, correspondiéndose con tiempos de vida media sumamente altos.



5. Conclusiones

Este capítulo ha considerado dos extensiones del modelo de crecimiento endógeno con ocio en la función de utilidad, estudiado recientemente por Lucas (1990) y Ladrón de Guevara, *et. al* (1995) entre otros. Los modelos desarrollados en este contexto permiten un crecimiento sostenido de la economía, a una tasa endógenamente determinada por decisiones óptimas de los agentes. En estos modelos la dinámica de convergencia a las sendas de crecimiento equilibrado viene determinada por el desbalance entre los stocks de ambos sectores, capital físico y humano. La presencia de ocio no cualificado en la función de utilidad es una fuente de no concavidades que origina la posibilidad de múltiples estados estacionarios, con una dinámica que puede ser bastante compleja. Bajo ciertas condiciones, el modelo, además de tener un estado interior localmente estable con crecimiento sostenido, puede presentar una trampa de pobreza, originada por un estado frontera sin inversión en capital humano. Una proporción de capital humano por unidad de capital físico por debajo del nivel crítico implicará una reducción paulatina de la inversión en capital humano, convergiendo en el largo plazo a un estado sin crecimiento.

En la primera extensión del modelo se generaliza la función de utilidad, permitiendo cualquier grado de cualificación del ocio. Se demuestra la robustez del resultado de multiplicidad de estados estacionarios. Se determinan las condiciones que garantizan una única senda de crecimiento equilibrado, bien sea interior o frontera, así como las condiciones requeridas para que se presente multiplicidad de sendas de crecimiento equilibrado. Se calibra el modelo, considerando distintos grados de cualificación del ocio. Para cualquier valor del parámetro de cualificación del ocio el modelo calibrado presenta un único estado estacionario con crecimiento sostenido, y se violan de manera significativa las condiciones de multiplicidad.

Sin consideraciones de costes de ajuste, una reducción de nivel de capital físico por unidad de capital humano incentiva de manera significativa el tiempo asignado al trabajo, y desincentiva el estudio. Como consecuencia el modelo predice una rápida recuperación

de los niveles de estado estacionario. Este comportamiento no es consistente con la evidencia sobre crecimiento, que predice procesos mucho más lentos de convergencia. En la segunda extensión del modelo se consideran costes de ajuste sobre la inversión en capital físico. Este parámetro, si bien no afecta de manera significativa los valores de estado estacionario, sí reduce las elasticidades de los tiempos asignados a los dos sectores ante un desbalance entre las proporciones de ambos capitales. Si se incluyen costes de ajuste sobre la acumulación de capital físico el proceso de convergencia se ralentiza y el modelo predice procesos lentos de crecimiento sostenido a tasas significativamente superiores a las de estado estacionario. Una calibración realista del modelo con costes de ajuste reproduce una dinámica con velocidades de convergencia y tiempos de vida media consistentes con la evidencia empírica.

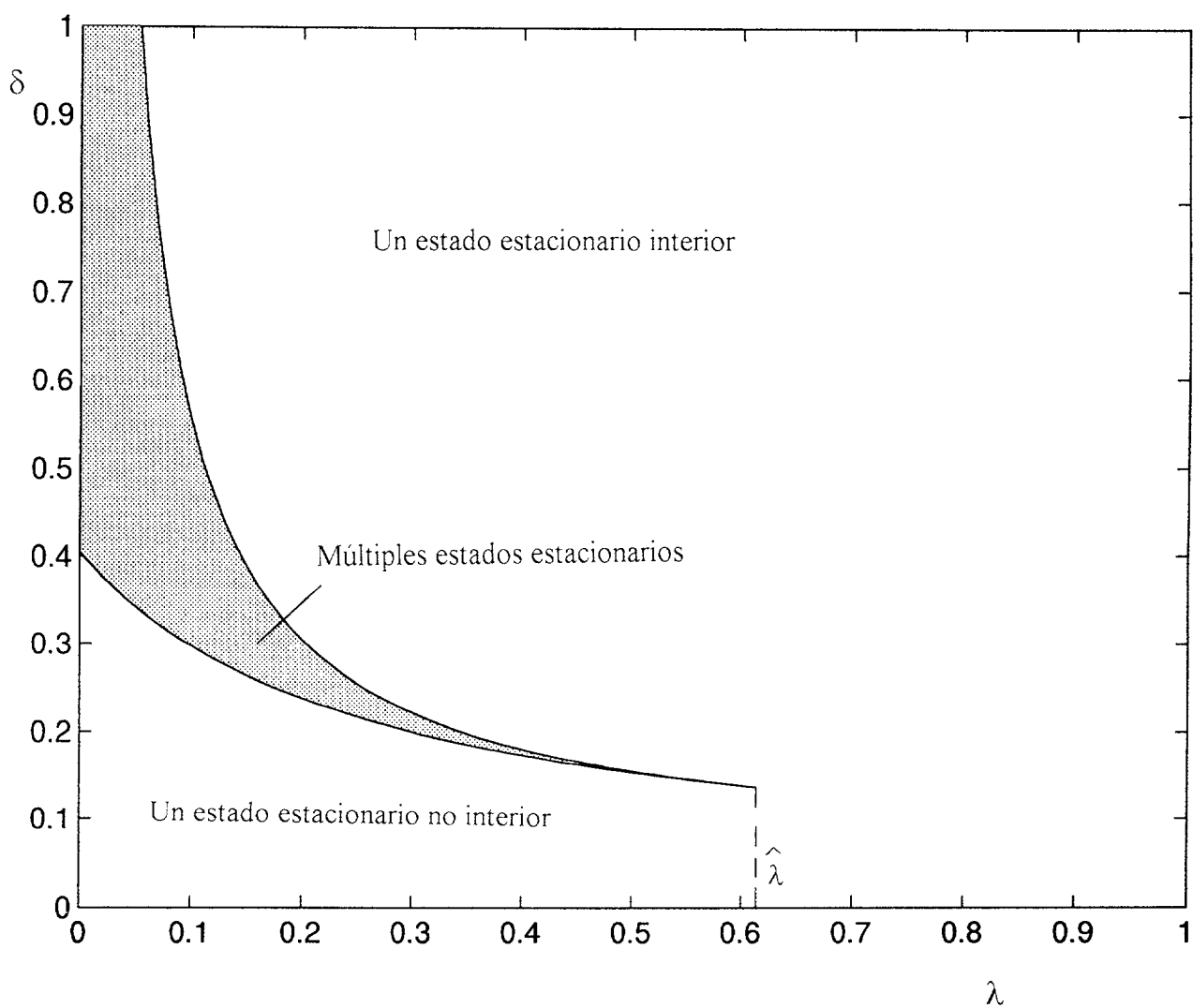


Figura 1.- Regiones de existencia de estados estacionarios en un plano (λ, δ) . Caso de la función de utilidad aditiva, con $\alpha=0.2$, $\rho=0.05$, $n=0$, $A=1$, $\beta=0.3$, $\pi=0$, y $\theta=0$.

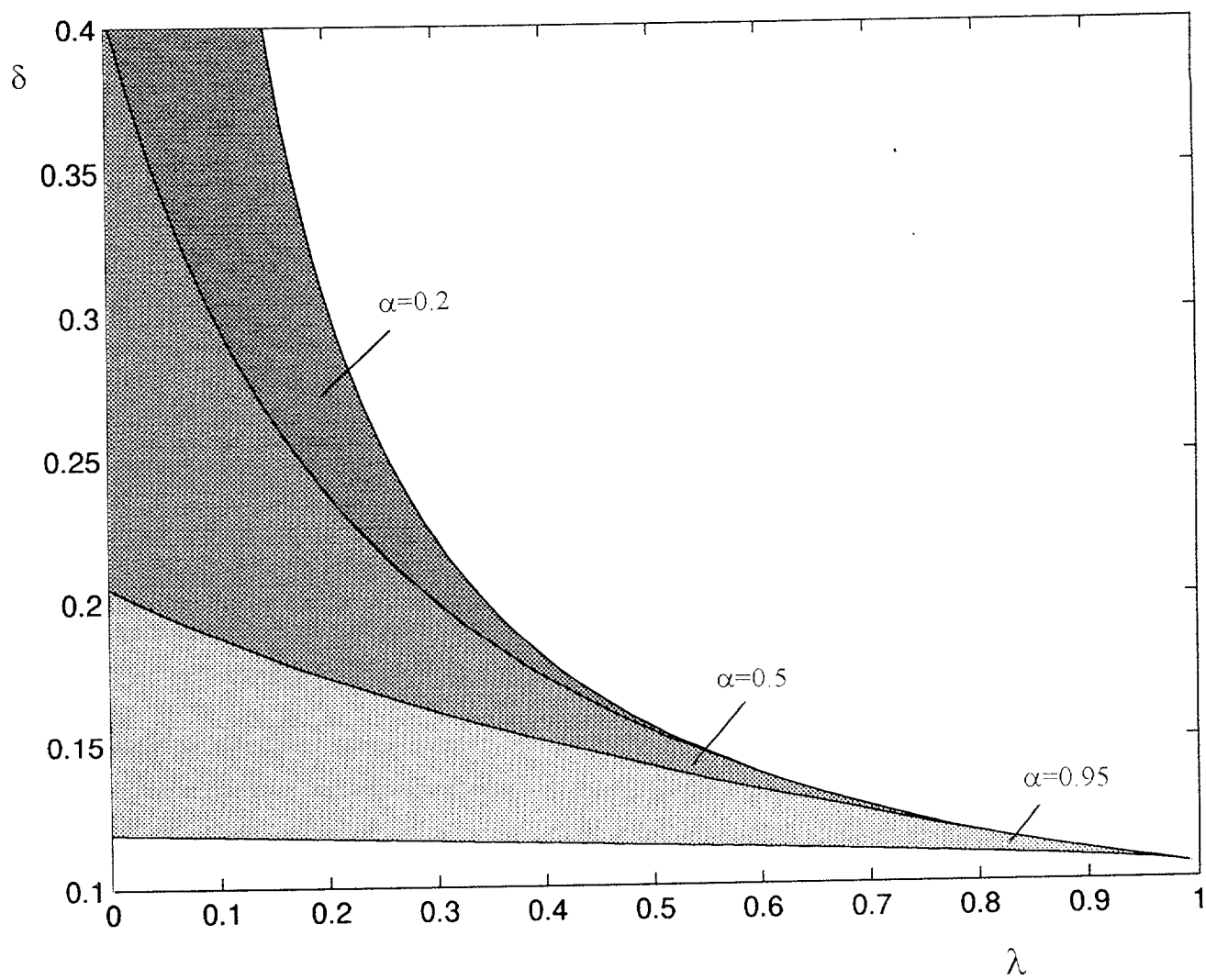


Figura 2.- Regiones de existencia de estados estacionarios en un plano (λ, δ) para diferentes valores de α . Caso de la función de utilidad aditiva, con $\rho=0.05$, $\eta=0$, $A=1$, $\beta=0.3$, $\pi=0$, y $\theta=0$.

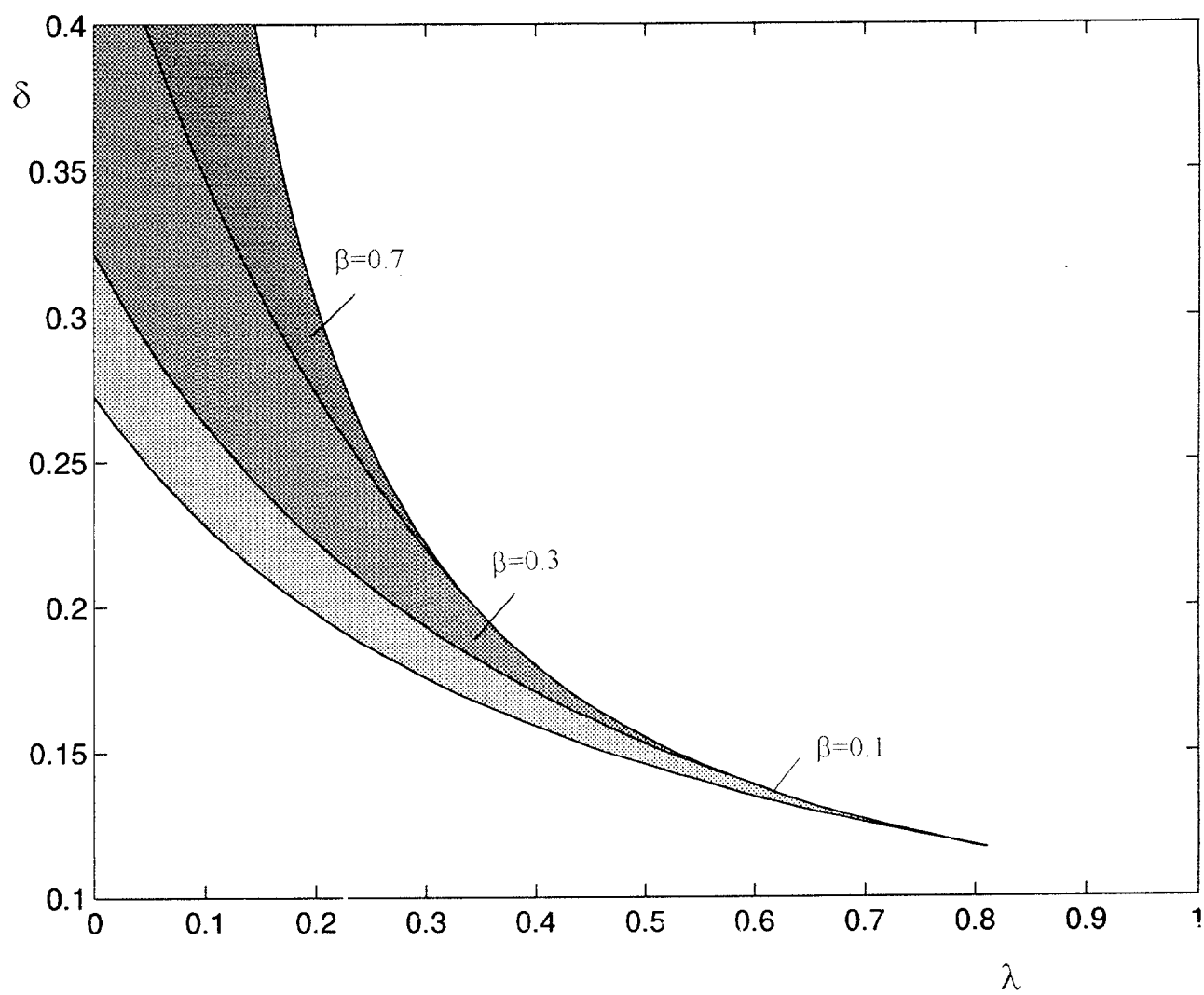


Figura 3.- Regiones de existencia de estados estacionarios en un plano (λ, δ) para diferentes valores de β . Caso de la función de utilidad aditiva, con $\alpha=0.2$, $\rho=0.05$, $\eta=0$, $A=1$, $\pi=0$, y $\theta=0$.

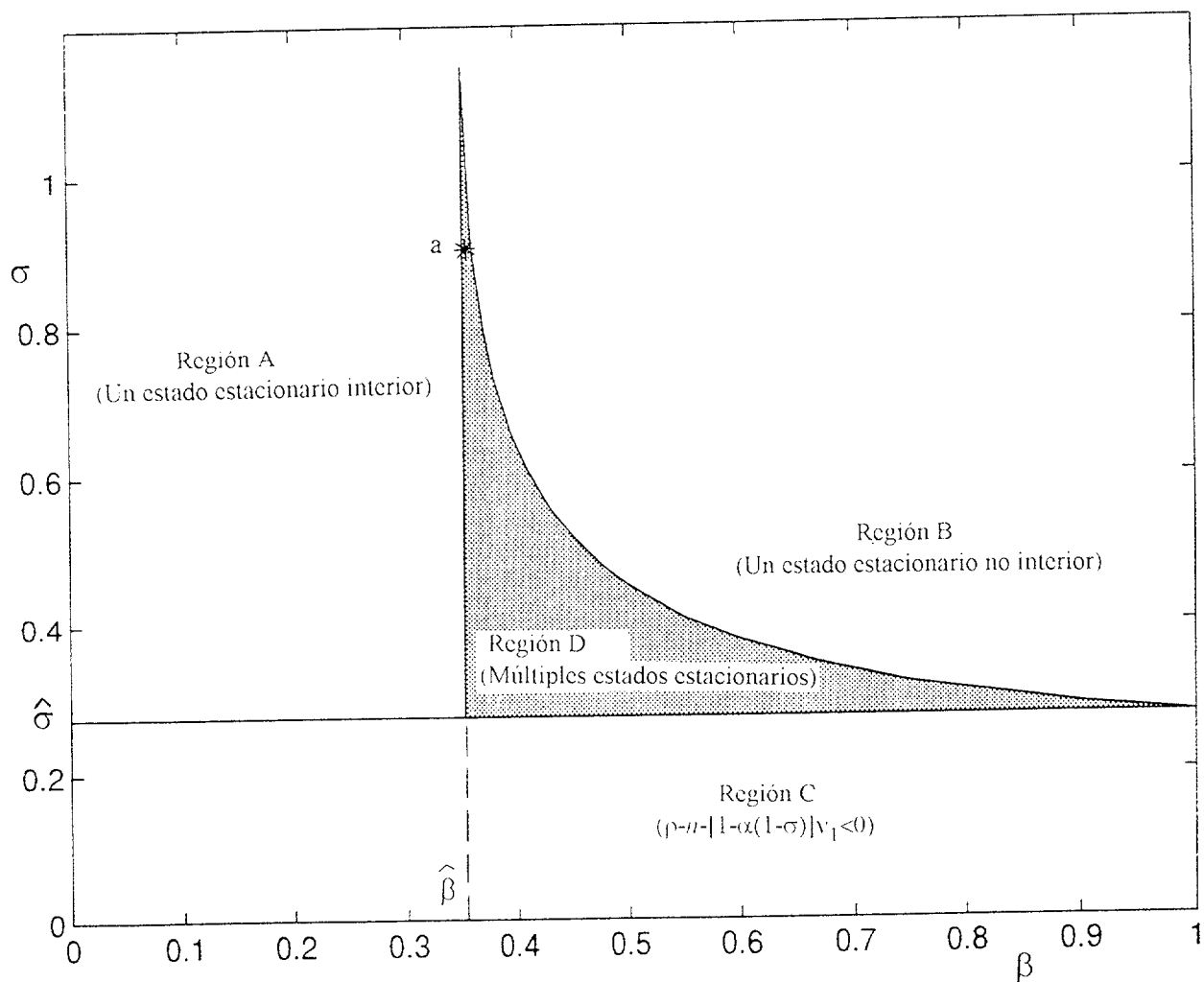


Figura 4.- Regiones de existencia de estados estacionarios en un plano (β, σ) para los siguientes valores de los demás parámetros: $\alpha=0.3$, $\lambda=0$, $\rho=0.05$, $\mu=0$, $A=1$, $\pi=0$, $\delta=0.23$ y $\theta=0$.

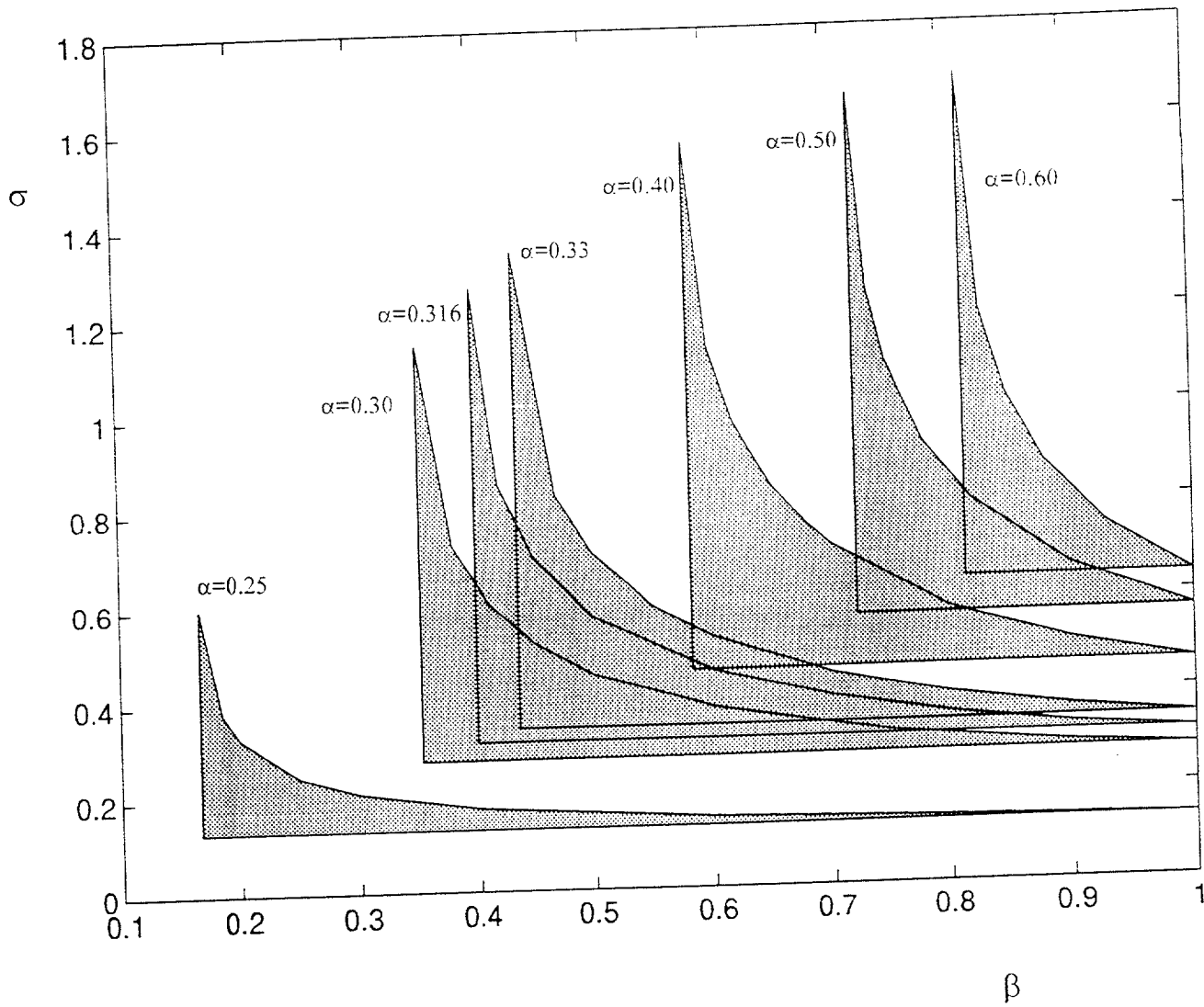


Figura 5.- Regiones de existencia de múltiples estados estacionarios en un plano (β, σ) para diversos valores de α , y los siguientes valores de los demás parámetros, $\rho=0.05$, $\lambda=0$, $n=0$, $A=1$, $\pi=0$, $\delta=0.23$ y $\theta=0$.

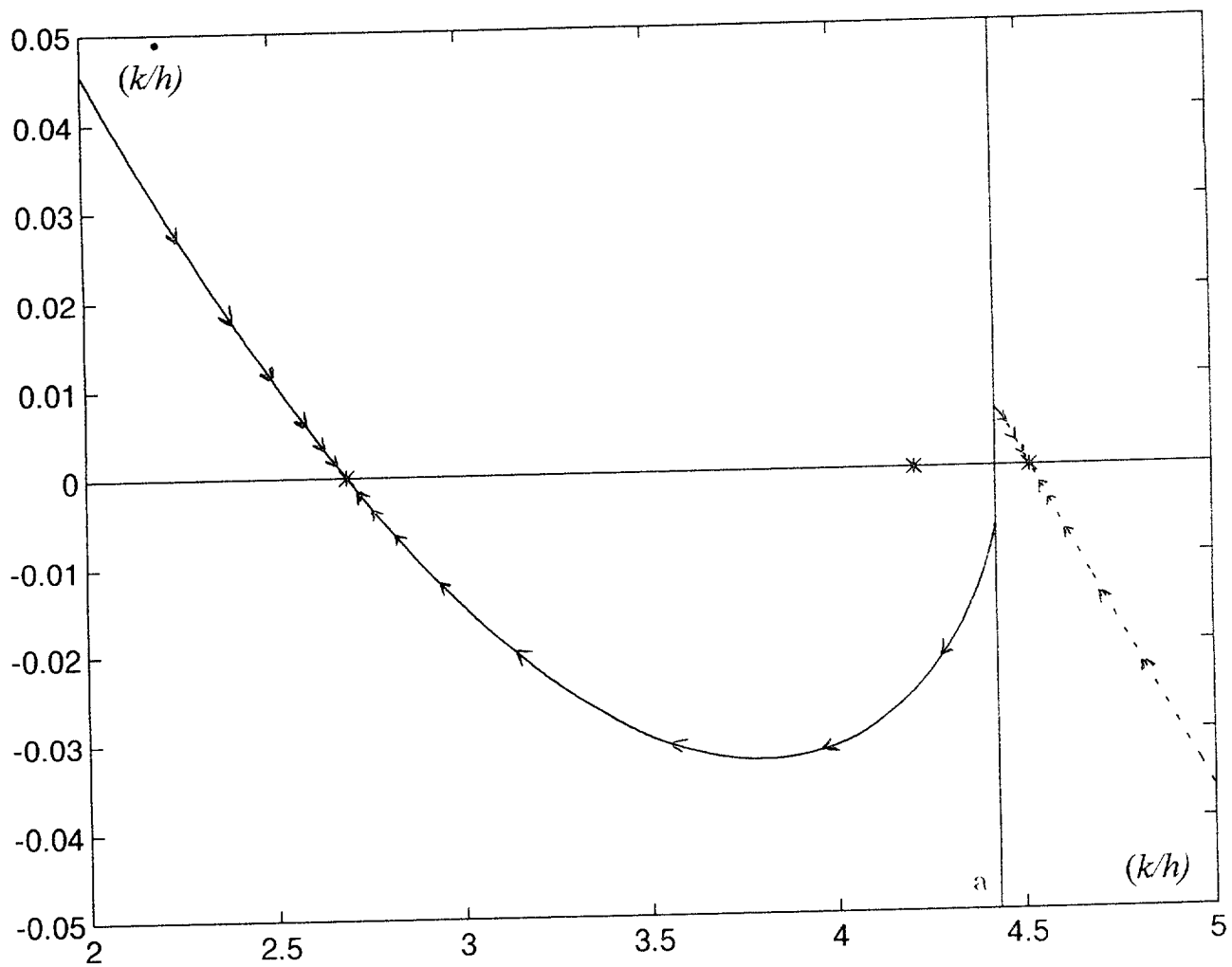


Figura 6.- Dinámica global de la variable de estado (k/h) en el ejemplo 1:
 $\sigma=0.906$, $\alpha=0.3$, $\lambda=0$, $\rho=0.05$, $n=0$, $A=1$, $\beta=0.355$, $\pi=0$, $\delta=0.23$ y $\theta=0$

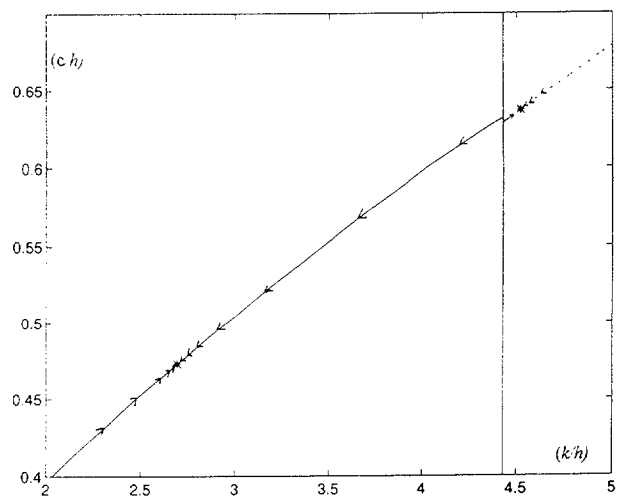
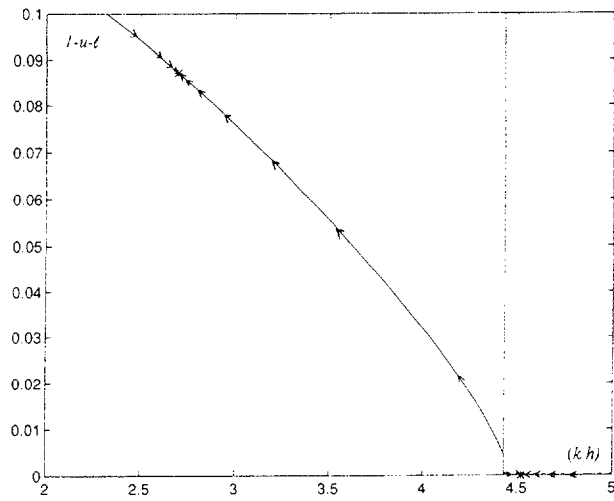
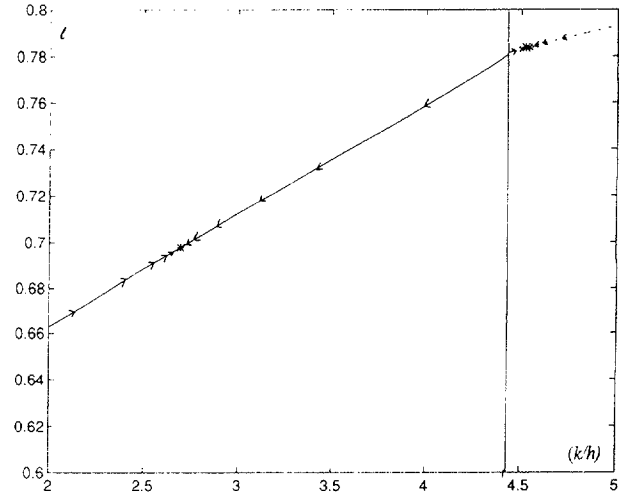
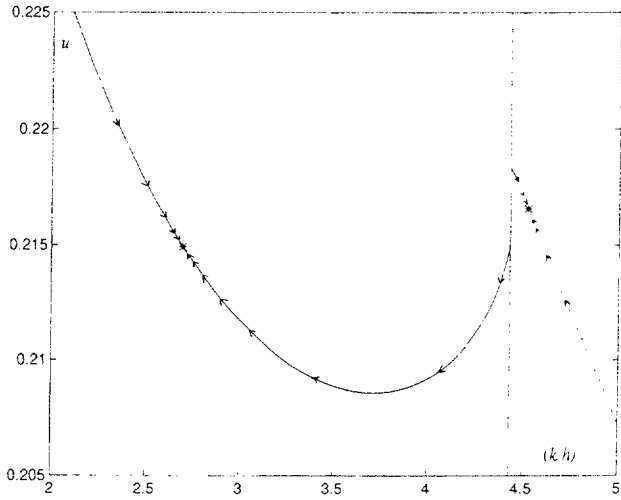


Figura 7 - Dinámica global de las distintas variables en el ejemplo 1:
 $\sigma=0.906$, $\alpha=0.3$, $\lambda=0$, $\rho=0.05$, $\mu=0$, $A=1$, $\beta=0.355$, $\pi=0$, $\delta=0.23$ y $\theta=0$.

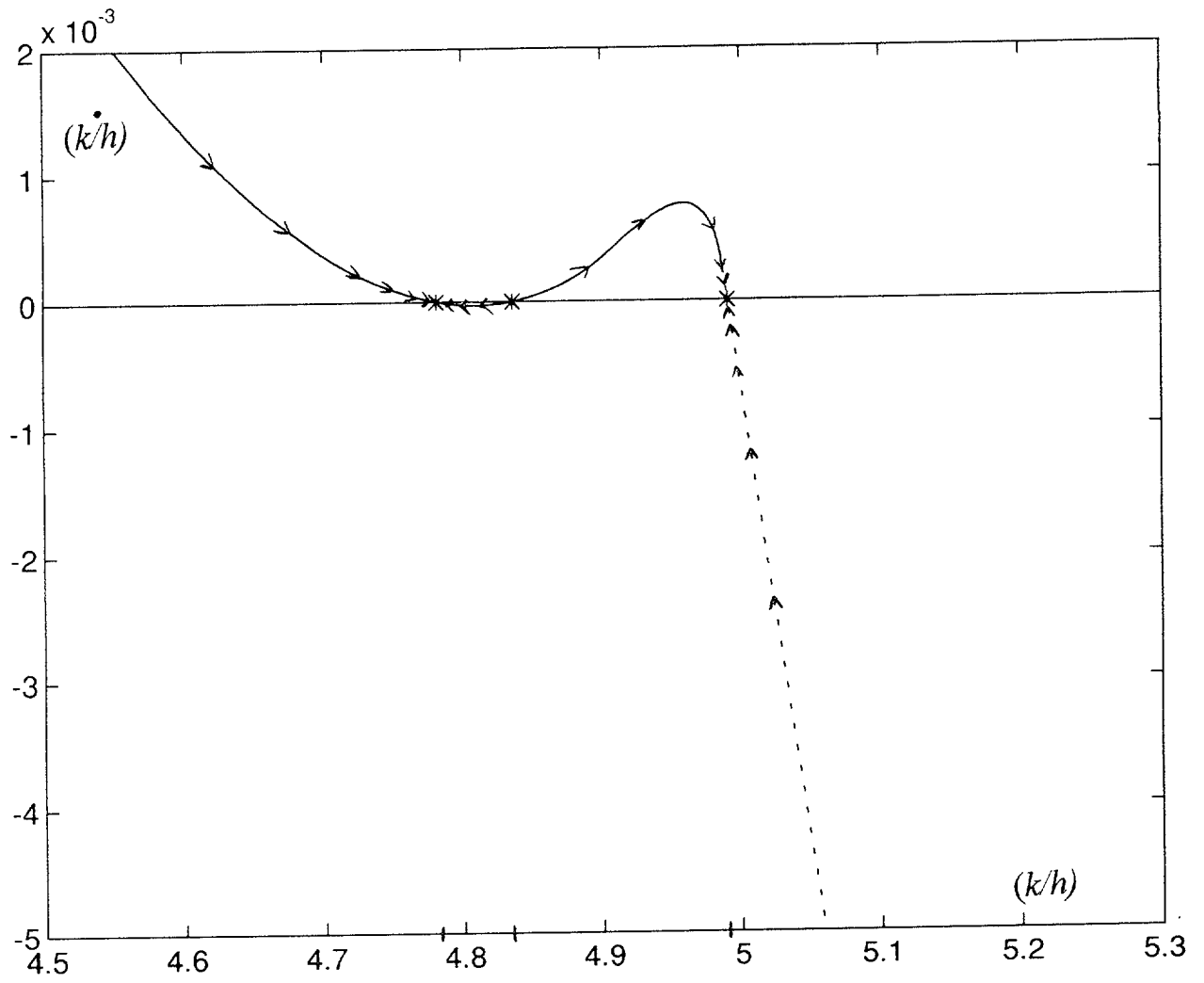


Figura 8.- Dinámica global de la variable de estado (k/h) en el ejemplo 2:
 $\sigma=0.995$, $\alpha=0.34$, $\lambda=0$, $\rho=0.05$, $n=0$, $A=1$, $\beta=0.3496$, $\pi=0$, $\delta=0.1992$ y $\theta=0$.

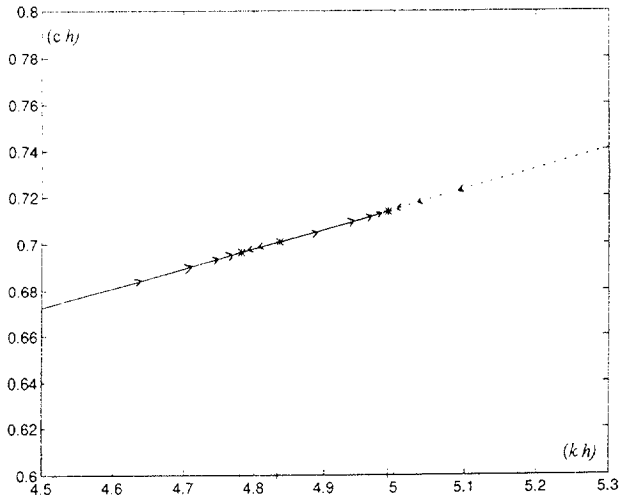
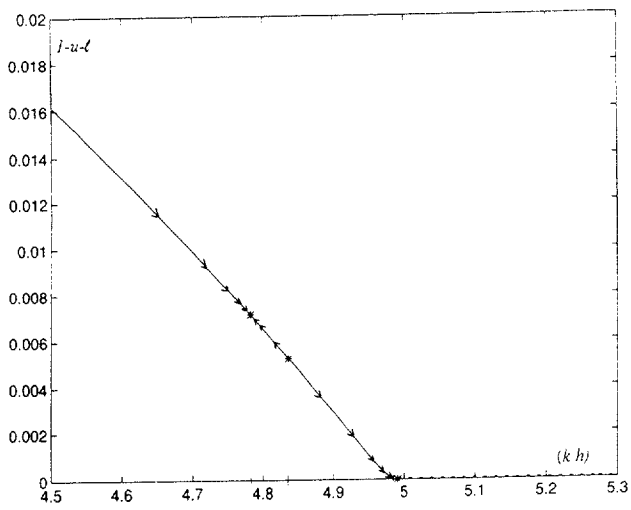
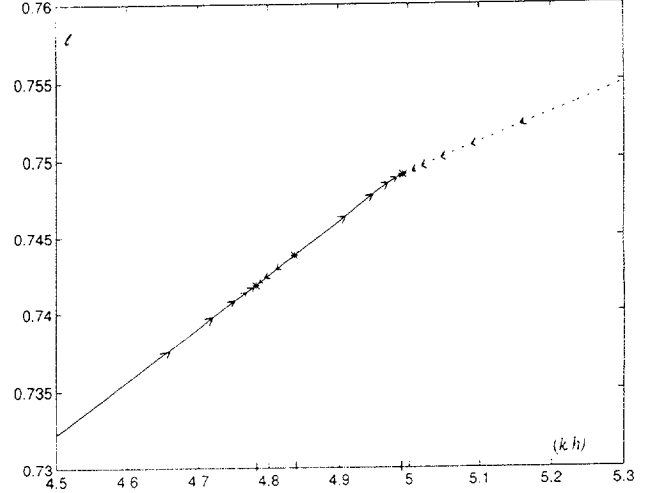
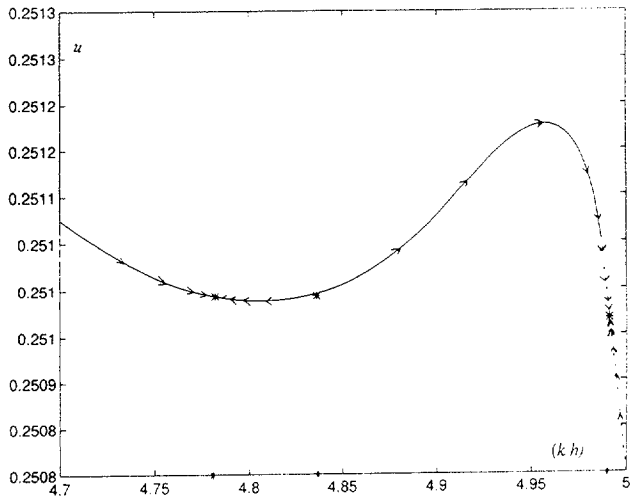


Figura 9.- Dinámica global de las distintas variables en el ejemplo 2:
 $\sigma=0.995$, $\alpha=0.34$, $\lambda=0$, $\rho=0.05$, $n=0$, $A=1$, $\beta=0.3496$, $\pi=0$, $\delta=0.1992$ y $\theta=0$.

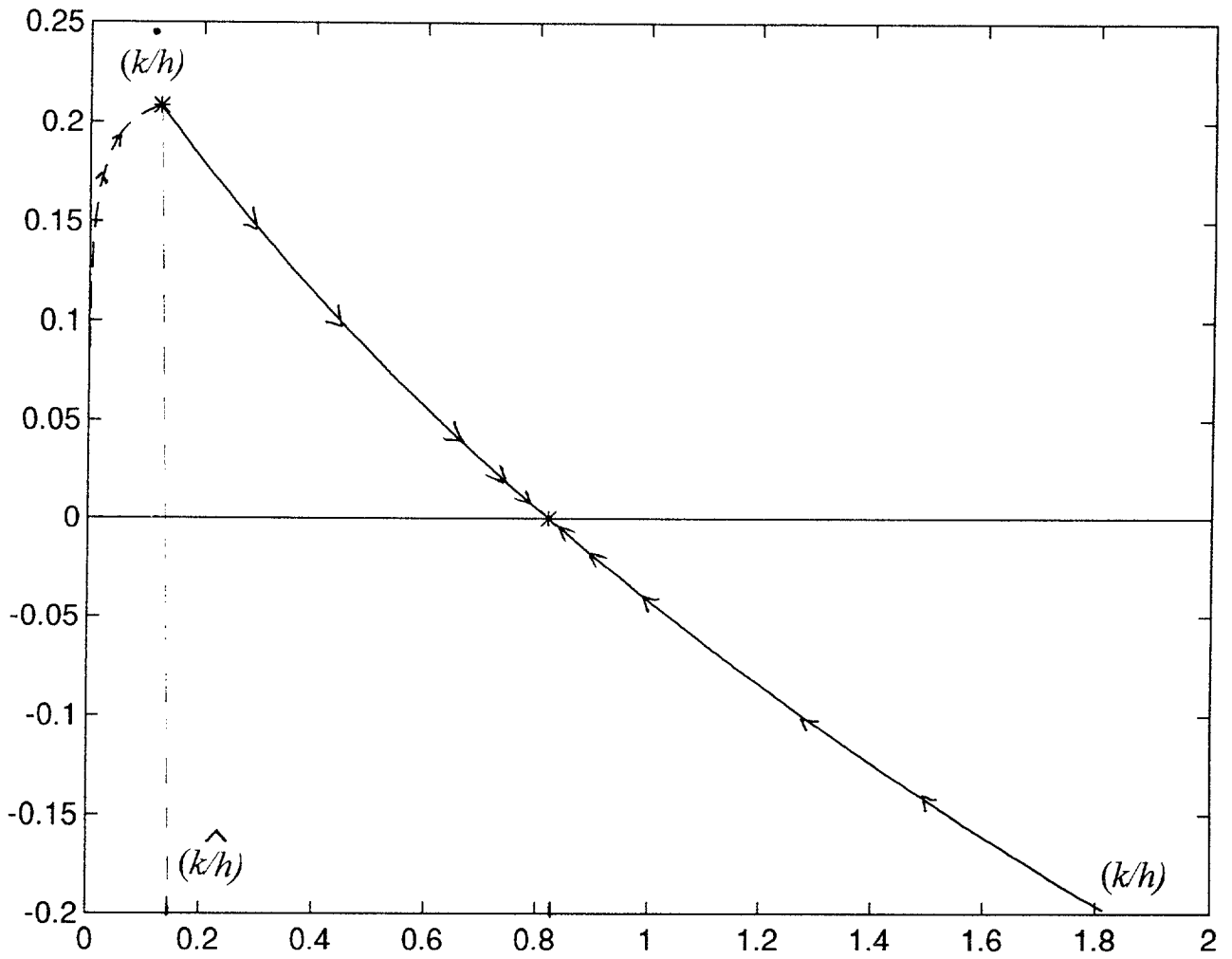


Figura 10.- Dinámica global de la variable de estado (k/h) en el ejemplo 3:
Formulación logarítmica, $\alpha=0.3$, $\lambda=0$, $\rho=0.05$, $n=0$, $A=1$, $\beta=0.25$, $\pi=0$, $\delta=0.23$ y $\theta=0$.

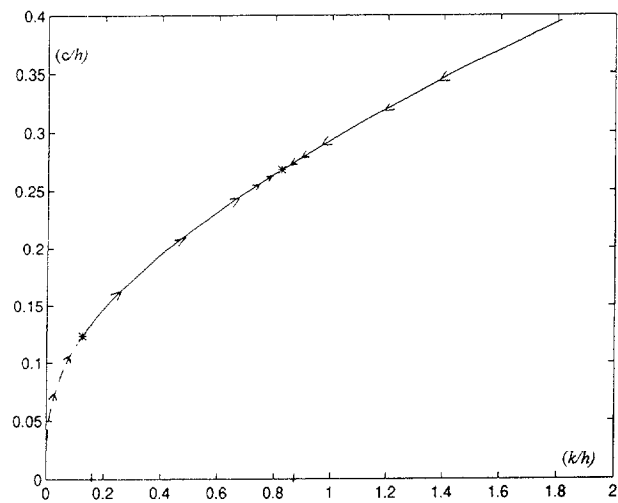
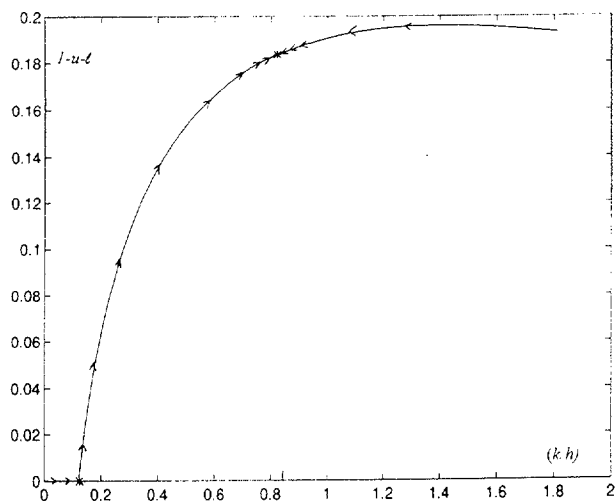
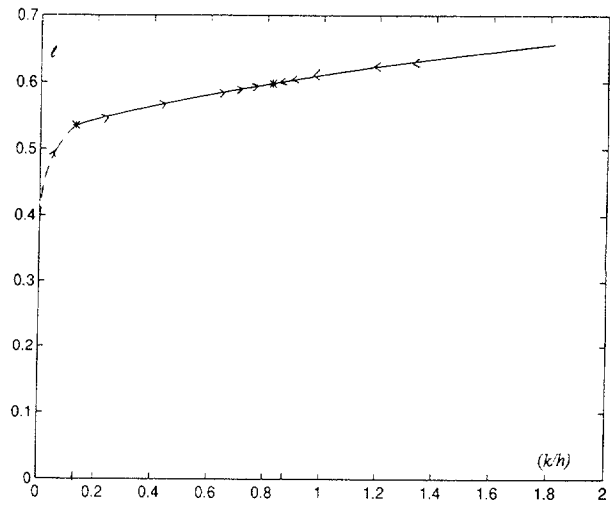
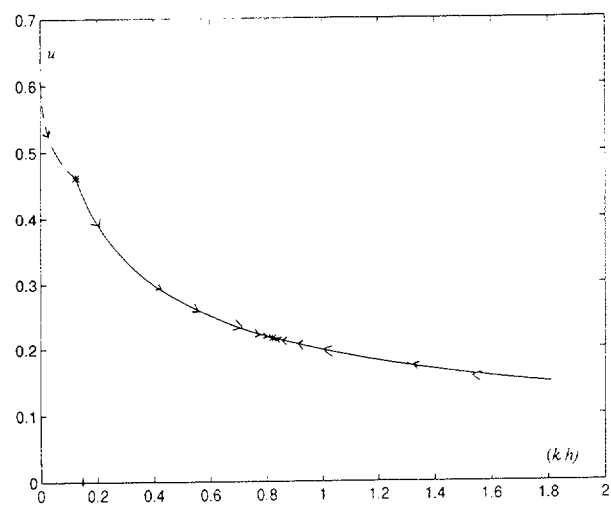


Figura 11.- Dinámica global de las distintas variables en el ejemplo 3:
Formulación logarítmica, $\alpha=0.3$, $\lambda=0$, $\rho=0.05$, $n=0$, $A=1$, $\beta=0.25$, $\pi=0$, $\delta=0.23$ y $\theta=0$.

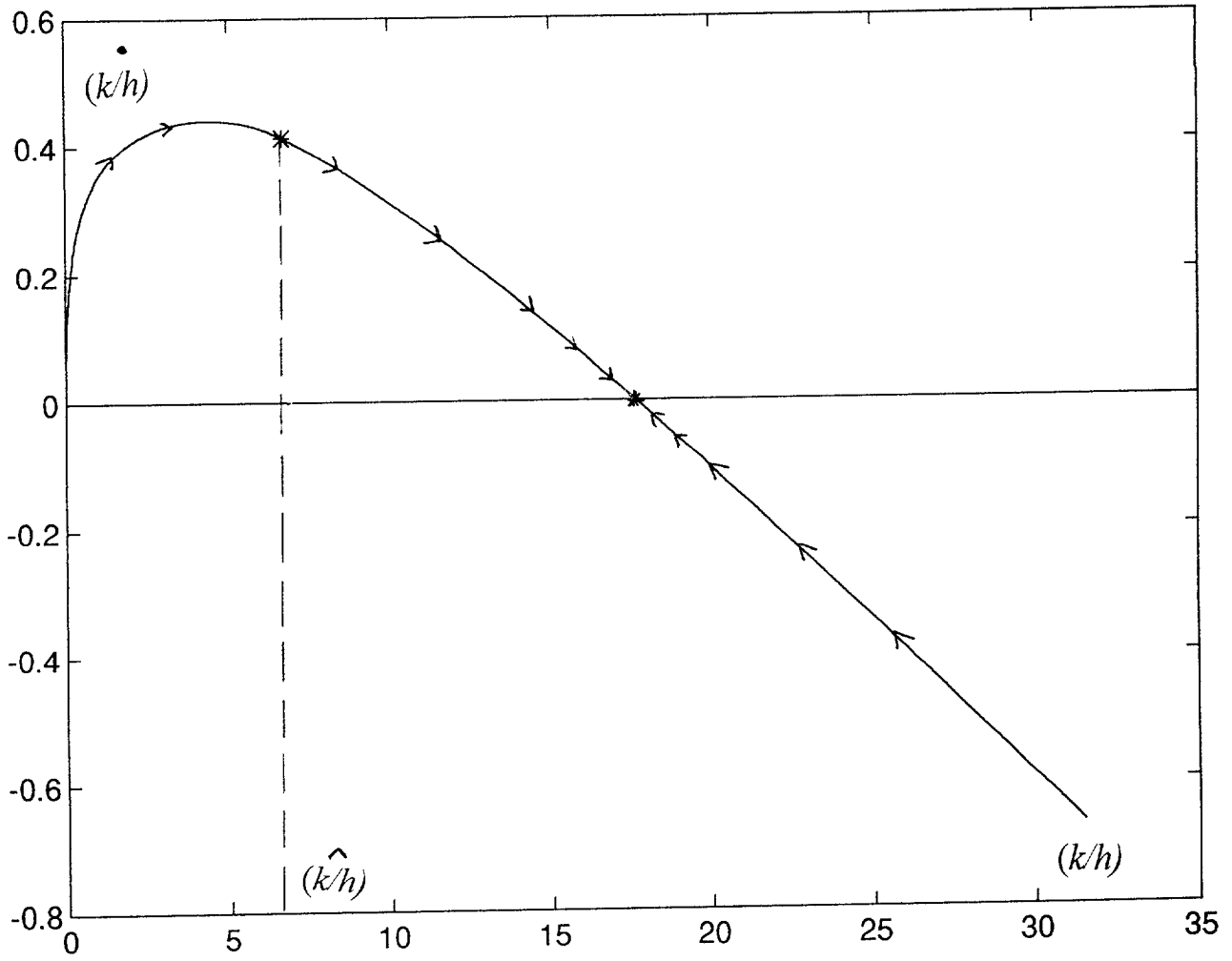


Figura 12.- Dinámica global de la variable de estado (k/h) en el ejemplo 4:
Formulación logarítmica, $\alpha=0.3$, $\lambda=0$, $\rho=0.05$, $n=0$, $A=1$, $\beta=0.5$, $\pi=0$, $\delta=0.23$ y $\theta=0$.

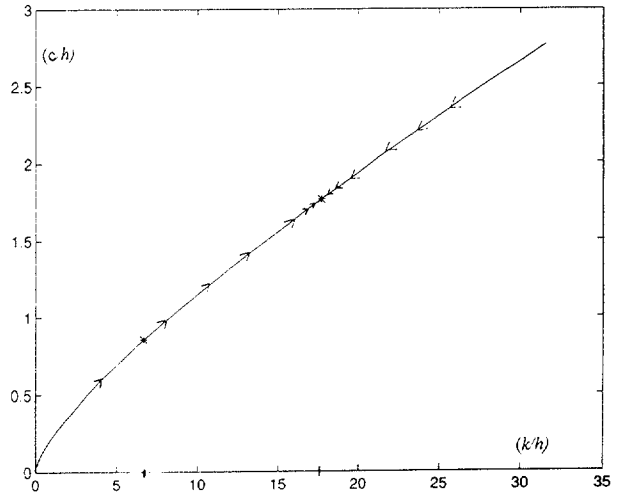
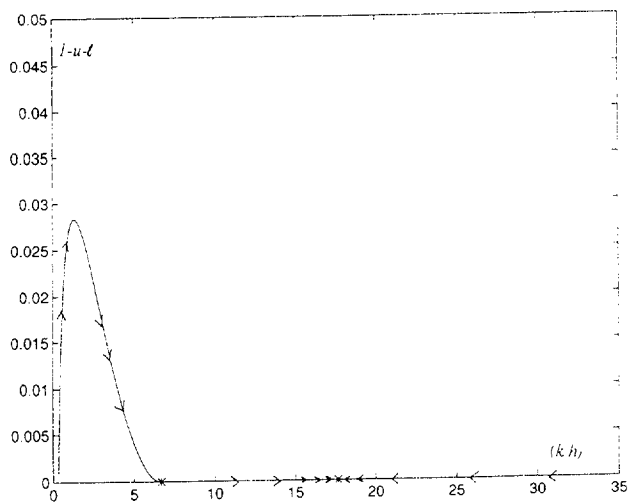
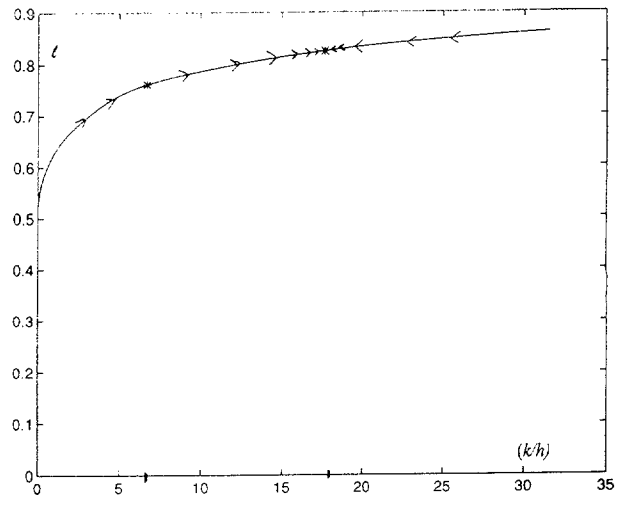
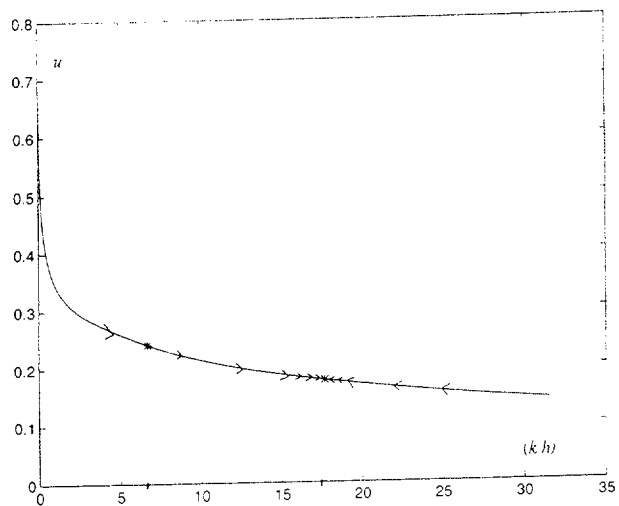


Figura 13. - Dinámica global de las distintas variables en el ejemplo 4:
Formulación logarítmica, $\alpha=0.3$, $\lambda=0$, $\rho=0.05$, $n=0$, $A=1$, $\beta=0.5$, $\pi=0$, $\delta=0.23$ y $\theta=0$.

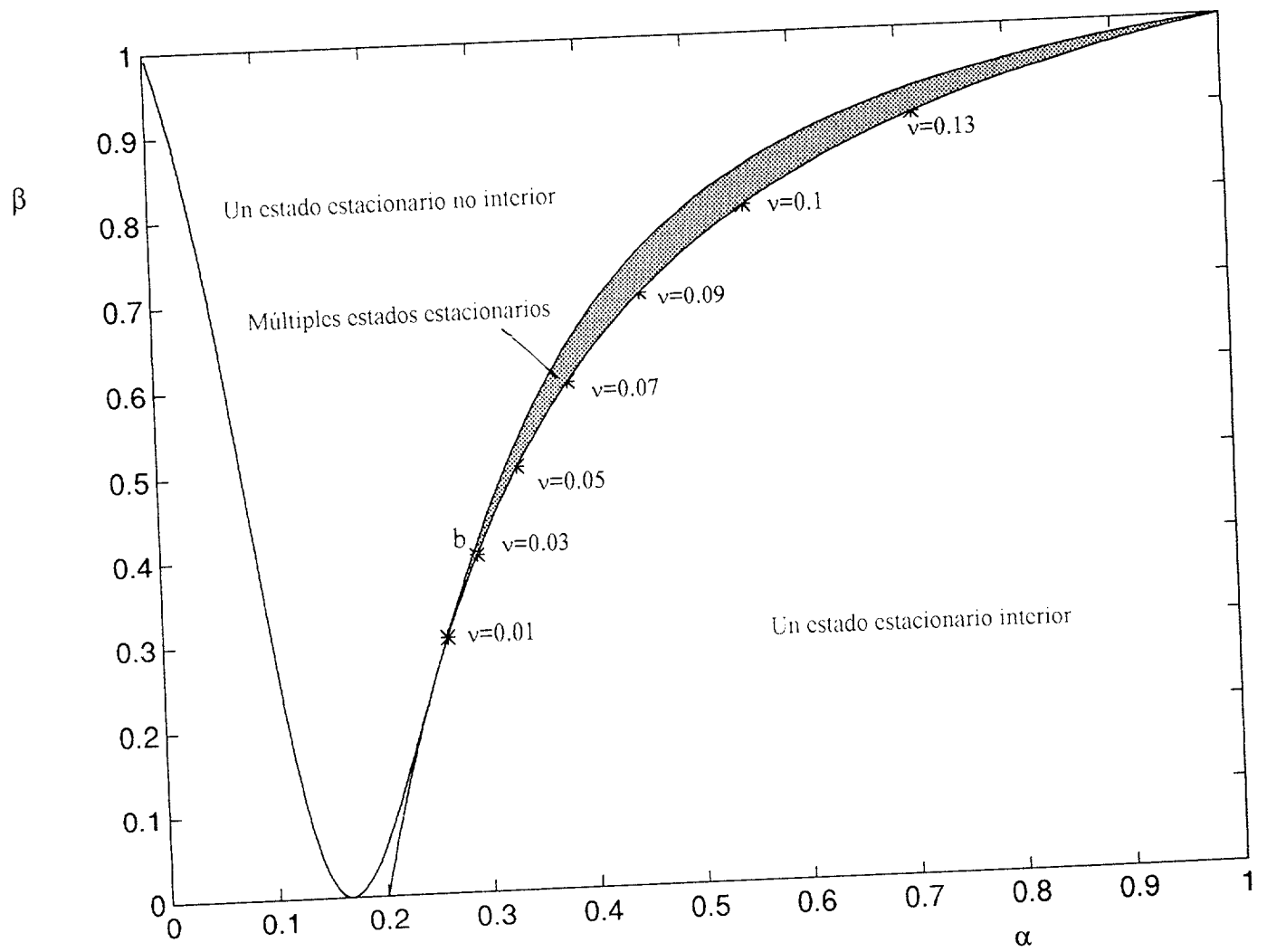


Figura 14.- Regiones de existencia de estados estacionarios en un plano (α, β) para el caso de la función de utilidad logarítmica y los siguientes valores de los parámetros: $\lambda=0$, $\rho=0.05$, $\eta=0$, $A=1$, $\pi=0$, $\delta=0.25$ y $\theta=0$.

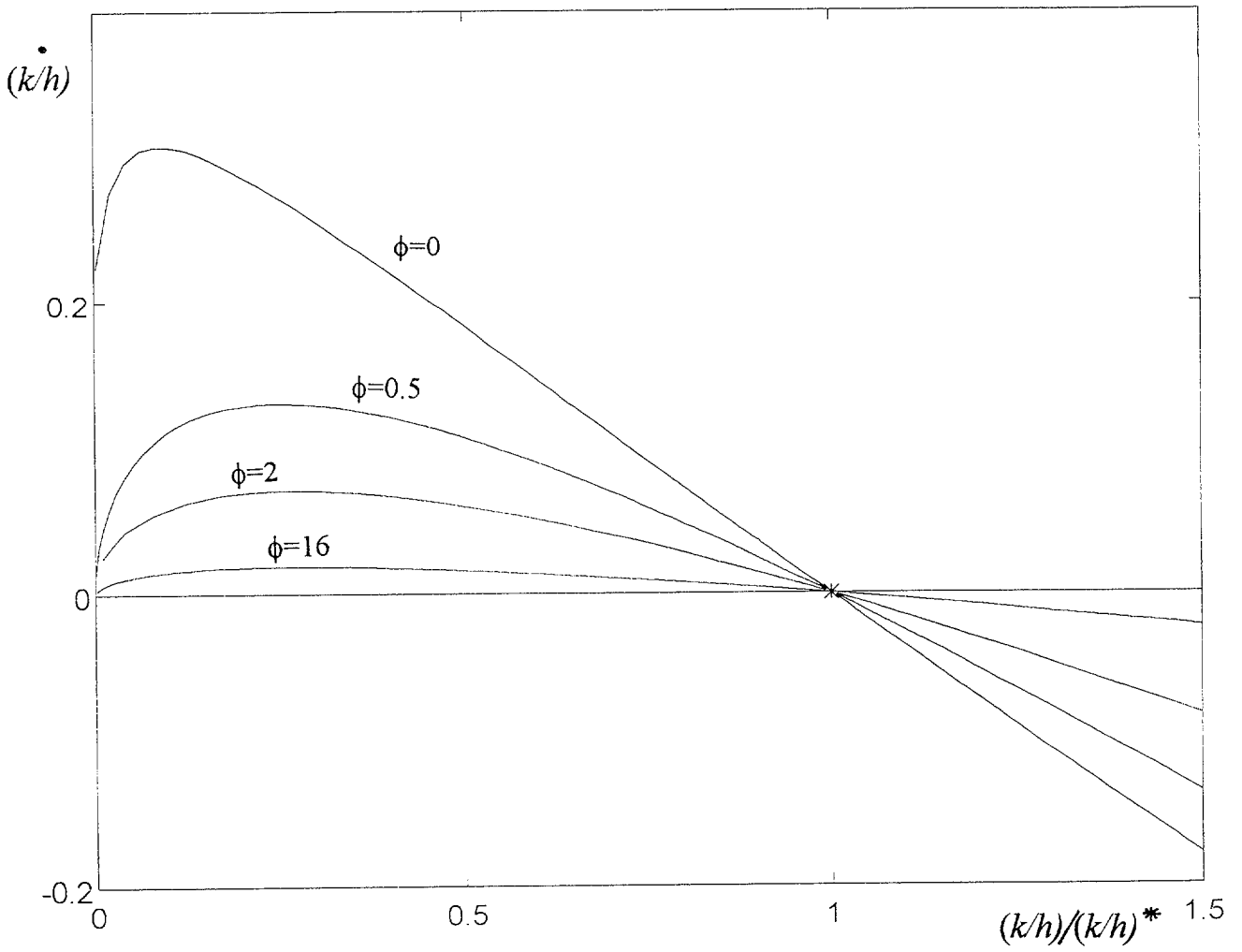


Figura 15.- Dinámica global de la variable de estado (k/h) para distintos valores del parámetro de costes de ajuste, ϕ , con $\sigma=2$, $\alpha=0.49$, $\lambda=0$, $\rho=0.04$, $n=0.014$, $A=1$, $\beta=0.36$, $\pi=0.068$, $\delta=0.056$ y $\theta=0$.

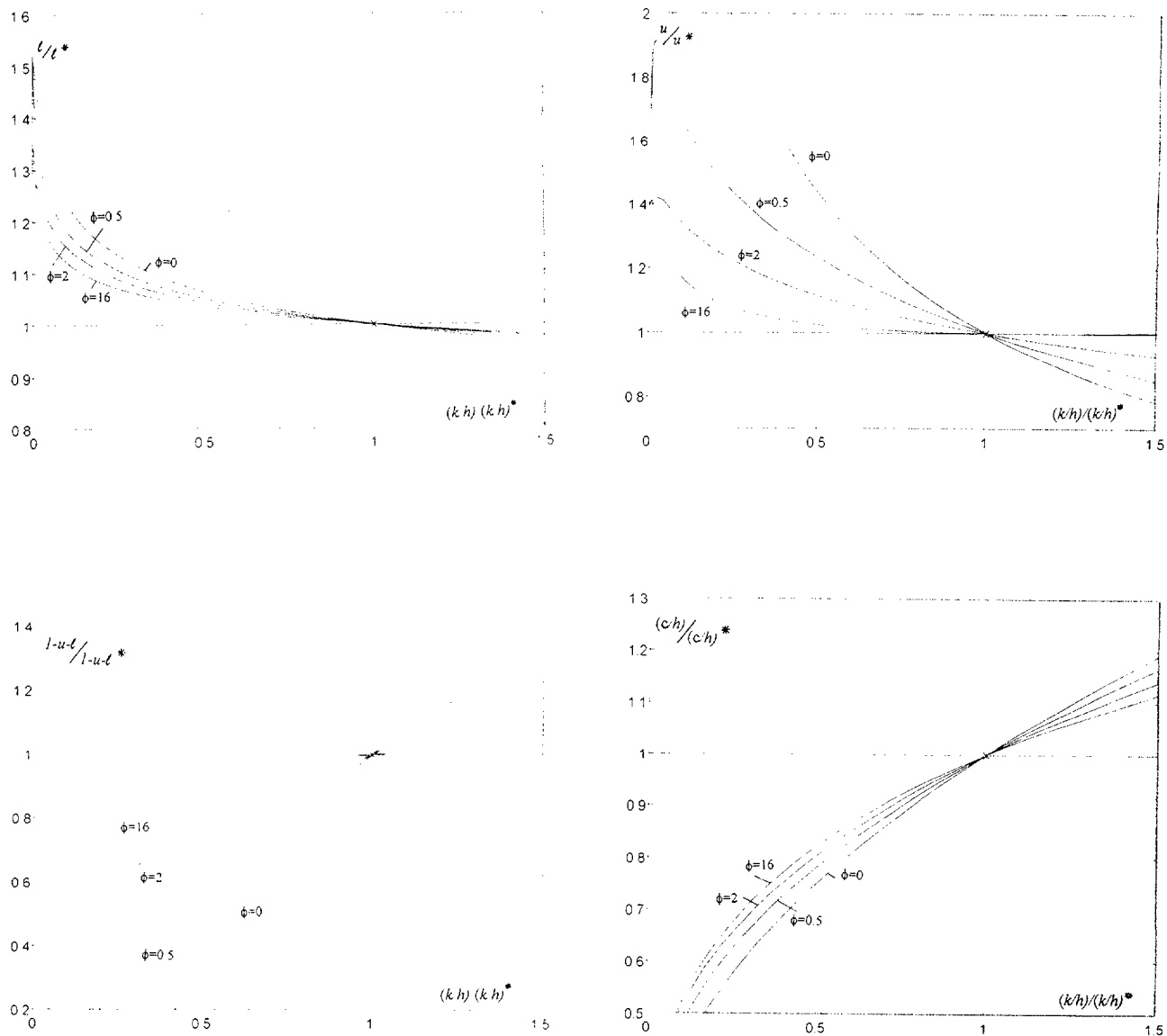


Figura 16.- Dinámica global de las distintas variables para diversos valores del parámetro de costes de ajuste, ϕ , con $\sigma=2$, $\alpha=0.49$, $\lambda=0$, $\rho=0.04$, $n=0.014$, $A=1$, $\beta=0.36$, $\pi=0.068$, $\delta=0.056$ y $\theta=0$.

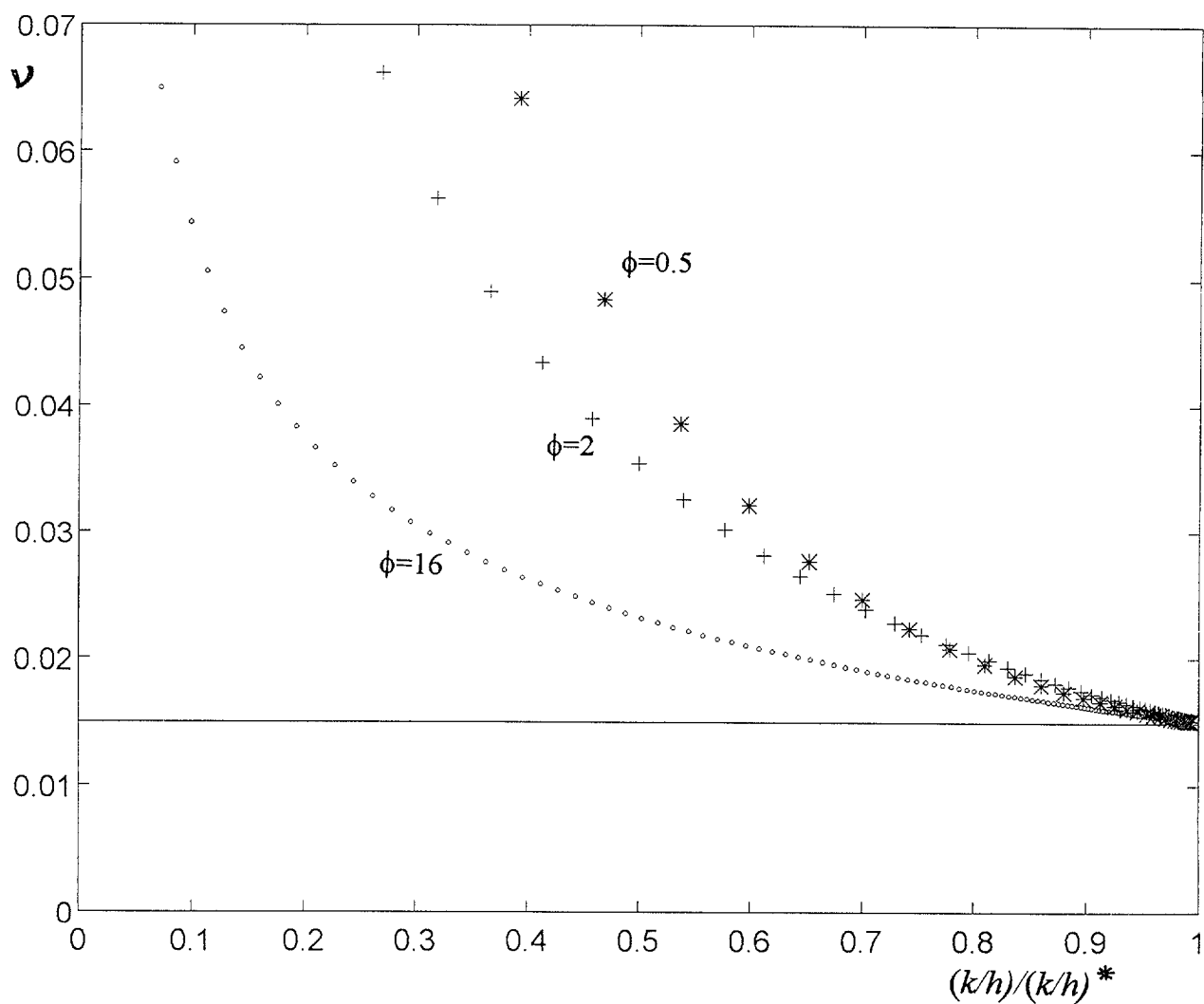


Figura 17.- Tasa de crecimiento de la producción per cápita para periodos anuales, con $\sigma=2$, $\alpha=0.49$, $\lambda=0$, $\rho=0.04$, $n=0.014$, $A=1$, $\beta=0.36$, $\pi=0.068$, $\phi=16$, $\delta=0.056$ y $\theta=0$.

APENDICE

En la primera parte de este apéndice desarrollaremos las condiciones de primer orden que rigen la dinámica del modelo general sin costes de ajuste, para los tramos de las trayectorias en los que las sendas de las variables no son interiores. En la segunda parte del apéndice demostraremos la concavidad de la función objetivo para la versión del modelo con costes de ajuste y ocio cualificado estudiada en la sección 4.

Parte I

En los tramos no interiores de las sendas óptimas los agentes no invierten en capital humano, y el mismo registra una depreciación constante a la tasa θ . Los agentes decidirán asignar una proporción $u(t)$ a la producción del bien físico y la proporción restante $(1 - u(t))$ al disfrute del ocio. El problema del planificador central queda expresado:

$$\begin{aligned}
 (P) \quad W_{(\tilde{k}_0, \tilde{h}_0)} &= \underset{\tilde{c}(t), u(t)}{Max} \int_{t=0}^{\infty} \frac{N(t)}{1-\sigma} \left[\tilde{c}(t)^\alpha \left((1-u(t)) \tilde{h}(t)^\lambda \right)^{1-\alpha} \right]^{1-\sigma} e^{-\rho t} dt \\
 &\quad s.a. \\
 \dot{\tilde{k}}(t) &= A\tilde{k}(t)^\beta \left(u(t)\tilde{h}(t) \right)^{1-\beta} - (\pi + n)\tilde{k}(t) - \tilde{c}(t) \\
 \dot{\tilde{h}}(t) &= -\theta\tilde{h}(t) \\
 \tilde{c}(t) &\geq 0, \tilde{k}(t) \geq 0, \tilde{h}(t) \geq 0 \\
 1 &\geq u(t) \geq 0 \\
 \tilde{k}_0, \tilde{h}_0 &\text{ dados, } N(t) = N_0 e^{nt}
 \end{aligned}$$

En el estado estacionario las variables decrecen a la tasa $-\theta$. Eliminando dicha tendencia, el problema queda:

$$\begin{aligned}
 (P') \quad \underset{c(t), u(t)}{Max} \int_{t=0}^{\infty} \frac{\left[c(t)^\alpha \left((1-u(t)) h_0^\lambda \right)^{1-\alpha} \right]^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{-\{\rho - n + \theta(1-\sigma)[\alpha + \lambda(1-\alpha)]\}t} dt \\
 \quad s.a.
 \end{aligned}$$

$$\dot{k}(t) = Ak(t)^\beta (u(t)h_0)^{1-\beta} - (\pi + n - \theta)k(t) - c(t)$$

$$\begin{aligned}
c(t) &\geq 0, \quad k(t) \geq 0 \\
1 &\geq u(t) \geq 0 \\
k_0, \quad h_0 &\text{ dados}
\end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden del problema anterior son:

$$\varphi_1(t) = \alpha c(t)^{\alpha(1-\sigma)-1} \left((1-u(t)) h_0^\lambda \right)^{(1-\alpha)(1-\sigma)}$$

$$(1-\beta) A k(t)^\beta (u(t) h_0)^{1-\beta} \varphi_1(t) = (1-\alpha) c(t)^{\alpha(1-\sigma)} \frac{u(t)}{(1-u(t))} \left((1-u(t)) h_0^\lambda \right)^{(1-\alpha)(1-\sigma)}$$

$$\frac{\dot{\varphi}_1(t)}{\varphi_1(t)} = \pi + \rho - [1 - (1-\sigma)(\alpha + \lambda(1-\alpha))] - A k(t)^\beta (u(t) h_0)^{1-\beta}$$

Eliminando las covariables de estado del sistema con las ecuaciones anteriores e incluyendo la ley de movimiento del capital físico obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales que regirá la dinámica de convergencia al estado estacionario frontera:

$$\frac{[\alpha(1-\sigma)-1]\dot{c}(t)}{c(t)} - \frac{(1-\alpha)(1-\sigma)\dot{u}(t)}{1-u(t)} = \pi + \rho - \theta [1 - (1-\sigma)(\alpha + \lambda(1-\alpha))] - \beta A \left(\frac{k(t)}{u(t)h_0} \right)^{\beta-1}$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} \left[\beta + \frac{u(t)}{1-u(t)} \right] = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - \beta \frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$$

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = A \left(\frac{k(t)}{u(t)h_0} \right)^{\beta-1} - (\pi + n - \theta) - \frac{c(t)}{k(t)}$$

Imponiendo estacionariedad podemos hallar los valores de largo plazo para la solución no interior:

$$\begin{aligned}
A\left(\frac{k}{uh}\right)^{\ast\beta-1} &= \pi + \rho - \theta [1 - (1 - \sigma)(\alpha + \lambda(1 - \alpha))] \\
\left(\frac{c}{k}\right)^{\ast} &= \frac{\theta(1 - \sigma)[\alpha + \lambda(1 - \alpha)]}{\beta} + \left(\frac{1 - \beta}{\beta}\right)(\pi + \rho - \theta) \\
u^{\ast} &= \frac{\alpha(1 - \beta)\{\pi + \rho - \theta[1 - (1 - \sigma)(\alpha + \lambda(1 - \alpha))]\}}{(1 - \alpha\beta)\pi + \rho - \theta[1 - (1 - \sigma)(\alpha + \lambda(1 - \alpha))] - \beta(1 - \alpha)(\pi + \rho - \theta)}
\end{aligned}$$

Parte II

A continuación demostraremos que la función objetivo del problema con costes de ajuste de la sección 4 es cóncava en los controles. Nos restringiremos al caso estudiado en dicha sección, donde la función de utilidad considera ocio cualificado, $U(c, \ell h) = \frac{1}{(1 - \sigma)} [c^\alpha (\ell h)^{1 - \alpha}]^{1 - \sigma}$. El problema original (P), antes de descontar las tasas de crecimiento de las variables, nos permite expresar la utilidad instantánea en función de las variables de estado $k(t)$, $h(t)$ y las variables de control, $\dot{k}(t)$, $\dot{h}(t)$ y $\ell(t)$:

$$U[k(t), \dot{k}(t), h(t), \dot{h}(t), \ell(t)] = \frac{[c(t)^\alpha (\ell(t)h(t))^{1 - \alpha}]^{1 - \sigma}}{(1 - \sigma)}$$

donde

$$c(t) = Ak(t)^\beta \left[\left(1 - \ell(t) - \frac{\theta}{\delta}\right) h(t) - \frac{\dot{h}(t)}{\delta} \right]^{1 - \beta} - (\pi + n)k(t) - \dot{k}(t) - \phi k(t) \left(\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \right)^2$$

$$c(t) \geq 0, \quad k(t) \geq 0, \quad h(t) \geq 0$$

$$\ell(t) \geq 0, \quad 1 - \frac{\theta + \nu}{\delta} - \ell(t) - \frac{\dot{h}(t)}{\delta h(t)} \geq 0, \quad 1 - \frac{\theta + \nu}{\delta} - \frac{\dot{h}(t)}{\delta h(t)} \leq 1$$

$$k_0, h_0 \text{ dados}$$

Para demostrar la concavidad de la función de utilidad instantánea respecto de los controles es suficiente demostrar la concavidad del término dentro del corchete $[c(t)^\alpha (\ell(t)h(t))^{1 - \alpha}]$, ya que la función $f(x) = \frac{x^{1 - \sigma}}{1 - \sigma}$ es una transformación cóncava. Desarrollando cuidadosamente las primeras y segundas derivadas respecto de los tres controles podemos construir la matriz Hessiana, para comprobar que la función de utilidad instantánea es cóncava en los controles. Por comodidad eliminamos el índice (t) en las variables:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{d^2 U(\cdot)}{dk^2} & \frac{d^2 U(\cdot)}{dkdh} & \frac{d^2 U(\cdot)}{dkd\ell} \\ \frac{d^2 U(\cdot)}{dhdk} & \frac{d^2 U(\cdot)}{dh^2} & \frac{d^2 U(\cdot)}{dh d\ell} \\ \frac{d^2 U(\cdot)}{d\ell dk} & \frac{d^2 U(\cdot)}{d\ell dh} & \frac{d^2 U(\cdot)}{d\ell^2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-\alpha(1-\alpha)xy^2}{c} - 2\phi\alpha x & \frac{-\alpha(1-\alpha)xyz}{\delta c} & -\alpha(1-\alpha)xy \left[\frac{hz}{c} + \frac{1}{\ell} \right] \\ \frac{-\alpha(1-\alpha)xyz}{\delta c} & -\frac{\alpha xz}{\delta^2} \left[\frac{(1-\alpha)z}{c} + \frac{\beta}{L} \right] & -\frac{\alpha xz}{\delta} \left[\frac{(1-\alpha)hz}{c} + \frac{(1-\alpha)}{\ell} + \frac{\beta h}{L} \right] \\ -\alpha(1-\alpha)xy \left[\frac{hz}{c} + \frac{1}{\ell} \right] & -\frac{\alpha xz}{\delta} \left[\frac{(1-\alpha)hz}{c} + \frac{(1-\alpha)}{\ell} + \frac{\beta h}{L} \right] & \frac{-(1-\alpha)z^2 x h^2}{c} - \frac{\beta z x h^2}{L} - \frac{\alpha(1-\alpha)x c}{\ell^2} - \frac{z(1-\alpha)(1+\alpha)x h}{\ell} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{c}{\ell h} \right)^{\alpha-1} \\ y &= 1 + 2\phi \frac{\dot{k}}{k} + 2\phi n \\ z &= A(1-\beta) \left(\frac{k}{L} \right)^{\beta} \\ L &= (1-\ell)h - \frac{\theta}{\delta}h - \frac{\dot{h}}{\delta} \end{aligned}$$

La matriz anterior es semidefinida negativa, por lo que la función $U(\cdot)$ es globalmente cóncava en los controles. Las restricciones de interioridad garantizan la positividad de las variables L , z y x . Concluimos, por los signos de las menores principales, que la Matriz H es semidefinida negativa:

$$\begin{aligned} H(1,1) &= \frac{-\alpha(1-\alpha)xy^2}{c} - 2\phi\alpha x \leq 0 \\ \det[H(12,12)] &= \frac{\alpha^2 x^2 z}{\delta^2} \left[\frac{(1-\alpha)\beta y^2}{cL} + \frac{2\phi(1-\alpha)z}{c} + \frac{2\phi\beta}{L} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(H) = & -\frac{2\phi\alpha^2x^3z}{\delta^2} \left[\frac{(1-\alpha)^3h^2z^3}{c^2} + \frac{\beta(1-\alpha)^2h^2z^2}{cL} + \frac{\alpha(1-\alpha)z}{\ell^2} + \frac{(1-\alpha)^2hz^2}{c\ell} + \frac{\beta(1-\alpha)h^2z^2}{cL} + \right. \\
& \left. + \frac{\beta^2h^2z}{L^2} + \frac{\beta(1-\alpha)c}{\delta^2\ell^2L} + \frac{\beta(1-\alpha)hz}{\ell L} \right] - \frac{\beta\alpha^2(1-\alpha)hx^3y^2z^2}{\delta^2cL} \left[\beta h + \frac{(1-\alpha)}{\ell} + \frac{(1-\alpha)^2hz}{c} \right] \leq 0
\end{aligned}$$

Referencias

- [1] Auerbach, A. y J. Kotlikoff (1987), *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge, England: Cambridge University Press.
- [2] Barro, R. J. y X. Sala-i-Martin (1992), "Convergence," *Journal of Political Economy* 100, págs. 223-251.
- [3] Bond, E., P. Wang, y C.Yip (1996), "A General Two-Sector Model of Endogenous Growth with Human and Physical Capital: Balanced Growth and Transitional Dynamics," *Journal of Economic Theory* 68, págs. 149-173.
- [4] Caballé, J. y M. S. Santos (1993), "On Endogenous Growth with Physical and Human Capital," *Journal of Political Economy* 101, págs. 1042-1068.
- [5] Friend, I. y M. E. Blume (1975), "The Demand for Risky Assets," *American Economic Review* 65, págs. 900-922.
- [6] Hansen, L. y K. Singleton (1983), "Stochastic Consumption, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Asset Returns," *Journal of Political Economy* 91, págs. 249-265.
- [7] Hayashi, F. (1982), "Tobin's Marginal q and Average q : a Neoclassical Interpretation," *Econometrica* 50, págs. 213-224.
- [8] King, R., C. I. Plosser y S. Rebelo (1988), "Production, Growth and Business Cycles: I. The Basic Neoclassical Model," *Journal of Monetary Economics* 21, págs. 309-341.
- [9] King, R. y S. Rebelo (1993), "Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model," *American Economic Review* 83, págs. 908-931.

- [10] Ladrón de Guevara, A., S. Ortigueira y M. Santos (1995), "A Two-Sector Model of Endogenous Growth with Leisure," *Discussion Paper Series, Centro de Investigación Económica, Instituto Tecnológico Autónomo de México*. N° 9503, Agosto 1995.
- [11] Lucas, R. E. (1967), "Adjustment Costs and the Theory of Supply," *Journal of Political Economy* 75, págs. 321-334.
- [12] Lucas, R. E. (1988), "On the Mechanics of Economic Development," *Journal of Monetary Economics* 22, págs. 3-43.
- [13] Lucas, R. E. (1990), "Supply Side Economics: An Analytical Review," *Oxford Economic Papers* 42, págs. 293-317.
- [14] Mankiw, G., D. Romer y D. Weil (1992), "A Contribution to the Empirics of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics* 107, págs. 407-437.
- [15] Mulligan, C. B. y X. Sala-i-Martin (1993), "Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. CVIII, págs. 740-773.
- [16] Ortigueira, S. (1995), "Un análisis Dinámico de un Modelo de Crecimiento Endógeno con Ocio," *Capítulo Segundo de Tesis Doctoral por la Universidad Carlos III de Madrid*.
- [17] Ortigueira, S. y M. Santos (1994), "On Convergence in Endogenous Growth Models," *Discussion Paper, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Centro de Investigación Económica*, N° 9409.
- [18] Summers (1981), "Taxation and Corporate Investment: A q-Theory Approach," *Brookings Papers on Economic Activity*, 1:1981, págs. 67-127.
- [19] Uzawa, H. (1965), "Optimum Technical Change in an Aggregate Model of Economic Growth," *International Economic Review* 6, págs. 18-31.



Capítulo tres

Ciclos Económicos Reales en un Modelo de Crecimiento Endógeno

1. Introducción

El modelo estándar de Ciclos Económicos Reales (CER) [Prescott (1986)] presenta importantes limitaciones para reproducir el comportamiento de las variables relativas al mercado de trabajo. Además de no considerar el desempleo y sus fluctuaciones, otros dos hechos estilizados no se han podido reproducir razonablemente: la volatilidad de las horas trabajadas es considerablemente superior a la de la productividad de las mismas, y la correlación entre estas dos variables es prácticamente cero.

Estas limitaciones son bien conocidas en la literatura de los CER y han motivado el desarrollo de investigaciones en diversas direcciones, con el objeto de mejorar la capacidad de los modelos para reproducir el comportamiento de los datos sobre el mercado de trabajo. Boldrin y Horvath (1995) incluyen contratos óptimos en el contexto del modelo estándar de CER con trabajadores adversos al riesgo, logrando un incremento sustancial de la volatilidad general del modelo y de las horas trabajadas. Hansen y Wright (1992) estudian cuatro conocidas extensiones del modelo básico. La primera considera indivisibilidad del trabajo [Hansen (1985)], donde los agentes pueden trabajar un número determinado de horas, o bien estar desempleados. En este modelo toda la variabilidad de las horas trabajadas es debida a fluctuaciones en el empleo. La segunda extensión estudiada utiliza una formulación no separable de la función de utilidad, lo cual permite un mayor grado de sustitución intertemporal del ocio [Kydland y Prescott (1982)]. El objetivo común de estas dos extensiones es el incremento de la volatilidad de las horas trabajadas. Sin embargo, a pesar de lograr mejoras considerables en este sentido, la correlación entre las horas trabajadas y la productividad de las mismas sigue siendo

positiva y sumamente alta. Esta característica parece ser común en cualquier modelo de crecimiento que considere un único shock sobre la función de producción del bien de consumo: los shocks sobre la tecnología del bien físico afectan a la curva de demanda de trabajo, la cual se desplaza ante una curva de oferta de trabajo básicamente estable. De esta manera las realizaciones de los modelos de un sector muestran distintos valores de la curva de oferta de trabajo, como se puede apreciar en la figura 1, que ilustra, entre otros, los resultados del modelo estándar de CER.

Además de este tipo de modelos, Hansen y Wright (1992) estudian dos extensiones adicionales que permiten considerar una segunda fuente de fluctuaciones, lo que origina una importante reducción de la correlación entre horas trabajadas y productividad. La segunda fuente de fluctuaciones afecta al gasto público en la primera extensión [Christiano y Eichenbaum (1992)] y a la tecnología de la producción en el sector de los hogares [Benhabib, Rogerson y Wright (1991)] en la segunda. Estas extensiones logran reducir la correlación entre horas trabajadas y productividad a través de desplazamientos tanto de la oferta como de la demanda de trabajo.

El reciente estudio de nuevos modelos que permiten endogenizar el crecimiento ha surgido a la par del desarrollo de la literatura de CER antes descrita. En estos modelos los cambios en la productividad, que se asumen exógenos en el modelo de Solow, son el resultado de decisiones óptimas por parte de los agentes. Jones y Manuelli (1994) revisan los diferentes enfoques desarrollados en esta literatura. Dentro de esta línea de estudio, los modelos de crecimiento con capital humano han cobrado relevancia en los últimos años. Los agentes invierten en el sector educativo con el objeto de incrementar la productividad de las horas trabajadas. Esto permite un crecimiento sostenido determinado tanto por los parámetros tecnológicos como por las preferencias de los agentes. [Véanse Bond, Wang y Yip (1996), Caballé y Santos (1993), Chamley (1993), Ladrón de Guevara, Ortigueira y Santos (1995) y Lucas (1988)].

Este artículo desarrolla primeramente la versión estocástica de un modelo general de

crecimiento endógeno con dos sectores y ocio en la función de utilidad. Siguiendo a Ladrón de Guevara *et al.* (1995), en esta extensión los agentes dedican fracciones de su dotación unitaria de tiempo a tres distintas actividades: trabajo, estudio y ocio. Las primeras dos asignaciones de tiempo se destinan a la producción de los capitales físico y humano respectivamente.

En una primera sección se estudia la versión estocástica del conocido modelo de crecimiento de Uzawa-Lucas, el cual se puede considerar como un caso particular del modelo general sin consideraciones de ocio en la función de utilidad. La función de producción de capital físico presenta un parámetro tecnológico que sigue un proceso estocástico estacionario autorregresivo de primer orden, como en la literatura estándar de CER. Sin necesidad de consideraciones de ocio el modelo es capaz de generar momentos que reproducen aquellos observados en las series de datos macroeconómicas de manera similar al modelo estándar de CER. Los agentes sustituyen trabajo y estudio intersectorialmente de acuerdo con la magnitud del shock tecnológico. Como es de esperar, el estudio tiene un comportamiento anticíclico: en los períodos recesivos los agentes trabajan menos, invirtiendo en estudio dado el incremento de la productividad relativa de las asignaciones de tiempo en este segundo sector. Sin embargo, este primer modelo presenta las mismas limitaciones del modelo estándar de CER para reproducir los hechos estilizados en el mercado de trabajo. A pesar de que la volatilidad general del modelo y la volatilidad relativa de las horas trabajadas son superiores, lo cual mejora el comportamiento del mismo respecto del modelo estándar de CER, la correlación entre horas trabajadas y productividad sigue siendo extremadamente alta.

Seguidamente se estudia el modelo más general, con consideraciones de ocio. En comparación con la versión estocástica del modelo de Uzawa-Lucas, la volatilidad relativa de las horas trabajadas se incrementa considerablemente al incluir ocio, ya que ahora los agentes sustituyen entre ocio presente y futuro (sustitución intertemporal) y entre las tres actividades: ocio, trabajo y estudio para un mismo período (sustitución intersectorial). A diferencia del modelo estándar de CER, en esta extensión los agentes pueden escoger

una senda bastante estable para las asignaciones de ocio, y responder a las variaciones en la productividad con sustitución entre sectores. Una alta volatilidad relativa de las horas trabajadas, como presentan los datos, no necesariamente implica una alta volatilidad del ocio. Esta es una contribución importante de los modelos con dos sectores, ya que las horas trabajadas pueden, en teoría, fluctuar en el mismo grado que lo hacen las series de datos, bien sea por sustitución entre los dos sectores o entre el trabajo y el ocio, y por tanto el nivel de ocio no necesariamente varía en el sentido opuesto al trabajo.

Como en los demás modelos con un solo shock, la extensión descrita anteriormente también muestra una correlación alta y positiva entre las horas trabajadas y la productividad de las mismas. Para mejorar el comportamiento del modelo se requiere de una segunda fuente de fluctuaciones. Se incluye por tanto un shock adicional que afecta ahora a la función de producción del sector de capital humano. Este segundo shock se puede interpretar como un proceso aleatorio inherente al propio proceso educativo. Con una calibración apropiada de este segundo proceso el modelo no presenta correlación entre las horas trabajadas y la productividad. Los momentos generados en términos generales reproducen los observados en las series de datos.

En la sección 2 se explica el modelo general, que comprende las distintas extensiones consideradas a lo largo del trabajo: crecimiento endógeno con acumulación de capital humano, tres usos del tiempo: trabajo, estudio y ocio, y dos shocks en los sectores de ambos capitales. En la sección 3 se resuelve la versión sin consideraciones de ocio, conocida como el modelo de Uzawa-Lucas, en contexto estocástico, con un único shock en el sector del capital físico. En la sección 4 se consideran las dos extensiones relevantes del modelo anterior: ocio en la función de utilidad y un segundo shock en el sector del capital humano. En la sección 5 se analizan los resultados y se concluye sobre las aportaciones de los modelos de CER con capital humano para reproducir el comportamiento de las variables del mercado de trabajo.

2. Modelo General

El modelo, en tiempo discreto, $t = 0, 1, 2, \dots$, considera un continuo de hogares idénticos de vida infinita que crecen a una tasa n , exógenamente determinada:

$$N(t) = N_0(1 + n)^t$$

donde $N_0 > 0$ es el tamaño inicial de la población. Cada hogar deriva utilidad del consumo de un único bien físico, $\tilde{c}(t)$, y de la asignación de una fracción de la dotación de tiempo disponible a actividades de ocio, $\ell(t)$, y descuenta la utilidad futura esperada a una tasa ρ .

Para que el modelo presente estados estacionarios determinísticos con niveles de asignación de tiempo constantes, y sin embargo presente crecimiento sostenido de las variables en términos per cápita, se requiere una formulación de la función de utilidad separable en ambos argumentos, así como elasticidad de sustitución intertemporal constante respecto del consumo [ver King, Plosser y Rebelo (1988)]. De esta manera la formulación más general de la función de utilidad sería:

$$\begin{aligned} U[\tilde{c}(t), \ell(t)] &= \frac{1}{1-\sigma} [\tilde{c}(t)^\alpha \Psi(\ell(t))]^{1-\sigma} & \sigma > 0, \quad \sigma \neq 1 \\ U[\tilde{c}(t), \ell(t)] &= \alpha \log \tilde{c}(t) + \Phi(\ell(t)) \end{aligned}$$

donde $\Psi(\cdot)$ y $\Phi(\cdot)$ deben ser funciones que garanticen tanto la concavidad global como el crecimiento respecto de ambos argumentos de la función $U[\tilde{c}(t), \ell(t)]$. La segunda formulación se puede considerar como un caso límite de la forma funcional multiplicativa cuando la elasticidad de sustitución intertemporal de la función de utilidad $(\frac{1}{\sigma}) = 1$. Si consideramos una forma funcional con elasticidad de sustitución intertemporal constante para el ocio, la función de utilidad para un período queda:

$$\begin{aligned}
U[\tilde{c}(t), \ell(t)] &= \frac{1}{1-\sigma} [\tilde{c}(t)^\alpha \ell(t)^{1-\alpha}]^{1-\sigma} \quad \sigma > 0, \quad \sigma \neq 1 \\
U[\tilde{c}(t), \ell(t)] &= \alpha \log \tilde{c}(t) + (1-\alpha) \log \ell(t)
\end{aligned}$$

El supuesto de concavidad en la función de utilidad requiere entonces que $0 < \alpha < 1$ para cualquiera de las formulaciones anteriores.

Además de la asignación de tiempo al ocio, $\ell(t)$, los hogares asignan una fracción adicional $u(t)$ de su dotación de tiempo a la producción del bien físico, y la fracción restante, $1 - u(t) - \ell(t)$, a invertir en capital humano a través del proceso educativo. La tecnología en el sector de capital físico viene dada por una función de producción Cobb-Douglas. Los factores productivos son el stock de capital físico, $\tilde{K}(t)$, y las unidades eficientes de producción, $N(t)u(t)\tilde{h}(t-1)$, donde $\tilde{h}(t-1)$ es el stock de capital humano, o nivel educativo, en términos per cápita. El bien producido puede ser consumido o invertido para incrementar el stock de capital físico, el cual se deprecia a una tasa constante π_1 . Si expresamos el consumo y el capital físico en términos per cápita: $\tilde{c}(t) = \frac{\tilde{C}(t)}{N(t)}$ y $\tilde{k}(t) = \frac{\tilde{K}(t)}{N(t)}$, la restricción tecnológica de esta economía en la producción del bien físico queda:

$$(1+n) [\tilde{c}(t) + \tilde{k}(t)] = \theta_1(t) \tilde{k}(t-1)^\beta \left(u(t) \tilde{h}(t-1) \right)^{1-\beta} + (1-\pi_1) \tilde{k}(t-1)$$

donde el logaritmo del shock tecnológico, $\theta_1(t)$, sigue un proceso autorregresivo de primer orden:

$$\log \theta_1(t) = \gamma_1 \log \theta_1(t-1) + \varepsilon_1(t) \quad \text{donde} \quad \varepsilon_1(t) \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_1}^2)$$

En el sector educativo, las unidades eficientes de producción, $\tilde{h}(t-1) (1 - u(t) - \ell(t))$, presentan productividad marginal constante, $\delta > 0$. El capital humano se deprecia a una tasa $\pi_2 \geq 0$. El marco general incluye una segunda fuente de perturbaciones en el sector de producción del capital humano, $\theta_2(t)$, que al igual que en el sector del capital físico, sigue un proceso autorregresivo de primer orden. Este segundo shock se puede interpretar como

un proceso aleatorio inherente al propio proceso educativo. La restricción tecnológica en el segundo sector queda:

$$\tilde{h}(t) = \theta_2(t)\delta\tilde{h}(t-1)(1-u(t)-\ell(t)) + (1-\pi_2)\tilde{h}(t-1)$$

donde

$$\log \theta_2(t) = \gamma_2 \log \theta_2(t-1) + \varepsilon_2(t), \quad \varepsilon_2(t) \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_2}^2)$$

En ausencia de externalidades, el equilibrio competitivo de esta economía coincide con la solución del problema del planificador central:

$$\begin{aligned} (P') \quad & \underset{\substack{\tilde{c}(t), \ell(t), u(t) \\ s.a.}}{Max} \quad E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{[\tilde{c}(t)^\alpha \ell(t)^{1-\alpha}]^{1-\sigma}}{1-\sigma} N(t) \rho^t \\ (1+n) [\tilde{c}(t) + \tilde{k}(t)] &= \theta_1(t) \tilde{k}(t-1)^\beta (u(t) \tilde{h}(t-1))^{1-\beta} + (1-\pi_1) \tilde{k}(t-1) \\ \tilde{h}(t) &= \theta_2(t) \delta \tilde{h}(t-1) (1-u(t)-\ell(t)) + (1-\pi_2) \tilde{h}(t-1) \\ \log \theta_1(t) &= \gamma_1 \log \theta_1(t-1) + \varepsilon_1(t) \quad \text{donde} \quad \varepsilon_1(t) \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_1}^2) \\ \log \theta_2(t) &= \gamma_2 \log \theta_2(t-1) + \varepsilon_2(t) \quad \text{donde} \quad \varepsilon_2(t) \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_2}^2) \\ \tilde{k}(t) &\geq 0, \quad \tilde{h}(t) \geq 0, \quad \tilde{c}(t) \geq 0 \\ u(t) &\geq 0, \quad \ell(t) \geq 0, \quad u(t) + \ell(t) \leq 1 \end{aligned}$$

$$\tilde{k}_0, \tilde{h}_0 \text{ y } N_0 \text{ dados,} \quad N(t) = N_0(1+n)^t$$

La versión determinística del modelo descrito puede presentar múltiples estados estacionarios, [ver Ladrón de Guevara, Ortigueira y Santos (1995)]. Sin embargo, bajo determinadas condiciones el mismo presenta una única senda de crecimiento equilibrado, globalmente estable, donde las variables en términos per cápita, $\tilde{c}(t)$, $\tilde{h}(t)$ y $\tilde{k}(t)$, crecen a

una tasa constante endógenamente determinada, que denotaremos por ν . Las realizaciones de la economía presentarán por tanto oscilaciones alrededor de la senda de crecimiento equilibrado de la versión determinística. El modelo puede entonces ser transformado, descontando la tendencia de largo plazo para las variables que presentan crecimiento. Definimos las variables transformadas del modelo:

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{\tilde{c}(t)}{(1+\nu)^t} \\ h(t) &= \frac{\tilde{h}(t)}{(1+\nu)^t} \\ k(t) &= \frac{\tilde{k}(t)}{(1+\nu)^t} \end{aligned}$$

El problema del planificador central para el modelo transformado descontando la tasa de crecimiento de largo plazo en contexto determinístico queda:

$$\begin{aligned} (P') \quad & \underset{c(t), \ell(t), u(t)}{Max} \quad E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{[c(t)^\alpha \ell(t)^{1-\alpha}]^{1-\sigma}}{1-\sigma} [\rho(1+n)(1+\nu)^{\alpha(1-\sigma)}]^t \\ & s.a. \\ (1+n)(1+\nu)[c(t) + k(t)] &= \theta_1(t)k(t-1)^\beta (u(t)h(t-1))^{1-\beta} + (1-\pi_1)k(t-1) \\ (1+\nu)h(t) &= \theta_2(t)\delta h(t-1)(1-u(t)-\ell(t)) + (1-\pi_2)h(t-1) \\ \log \theta_1(t) &= \gamma_1 \log \theta_1(t-1) + \varepsilon_1(t) \quad \text{donde} \quad \varepsilon_1(t) \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_1}^2) \\ \log \theta_2(t) &= \gamma_2 \log \theta_2(t-1) + \varepsilon_2(t) \quad \text{donde} \quad \varepsilon_2(t) \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_2}^2) \\ k(t) &\geq 0, \quad h(t) \geq 0, \quad c(t) \geq 0 \\ u(t) &\geq 0, \quad \ell(t) \geq 0, \quad u(t) + \ell(t) \leq 1 \\ k_0, \quad h_0, \quad N_0 &\text{ dados} \end{aligned}$$

Como se comentó previamente, el modelo en contexto determinístico presenta una dinámica de largo plazo con una senda de crecimiento equilibrado, donde las variables

en términos per cápita crecen a una tasa constante endógenamente determinada. Al destendenciarizar las variables obtenemos una formulación del problema que presenta un estado estacionario en el que las variables transformadas se mantienen constantes. Dicho estado estacionario está caracterizado por unas proporciones fijas entre ambos capitales y el consumo. El modelo en contexto estocástico presentará un comportamiento oscilatorio alrededor de estos valores.

En las próximas secciones estudiaremos distintas versiones del modelo general descrito anteriormente, usando el método de aproximación cuadrático-lineal para su resolución, procedimiento estándar en la literatura de CER. Para usar este método se requiere trabajar con el modelo transformado, ya que la aproximación cuadrático-lineal reproduce la dinámica local alrededor de un punto del espacio de estados. En las versiones estocásticas de los modelos de crecimiento estudiados, las distintas variables fluctúan alrededor de las sendas de crecimiento equilibrado de la versión determinística. En los modelos transformados, al ser destendenciarizadas, las variables fluctúan alrededor de sus valores de estado estacionario determinístico. La precisión de los resultados obtenidos dependerá por tanto de la magnitud de las oscilaciones del modelo alrededor de dichos valores.

En la próxima sección desarrollaremos una versión estocástica, en tiempo discreto, del modelo de Uzawa-Lucas de dos sectores. Este modelo considera solamente dos usos del tiempo, trabajo y estudio. Si bien es conveniente resaltar que un modelo sin ocio no refleja de manera realista las asignaciones de los usos del tiempo, el comportamiento de esta primera versión del modelo general nos permite entender cómo funcionan las asignaciones de tiempo entre los dos sectores ante shocks de productividad. Los resultados en términos de volatilidades y correlaciones sin embargo reflejan un comportamiento acorde con los hechos estilizados. En la cuarta sección estudiamos la versión más general del modelo, incluyendo los tres usos del tiempo, que anida al modelo estándar de CER como un caso particular sin inversión en capital humano. Como era de esperar, el modelo con dos sectores presenta una mayor volatilidad que el modelo estándar de un sólo sector, originada por la posibilidad de sustituir intersectorialmente las asignaciones de tiempo.

En una generalización posterior se incluirá la segunda fuente de perturbaciones sobre la tecnología de capital humano. Como se explicará posteriormente, este segundo proceso aleatorio incide directamente sobre la oferta de trabajo reduciendo significativamente la correlación entre la productividad del factor trabajo y las horas trabajadas.

3. El Modelo de Uzawa-Lucas

En esta sección estudiaremos la versión estocástica, en tiempo discreto, del modelo de Uzawa-Lucas, como una versión particular del modelo general detallado en la sección anterior, sin considerar ocio en la función de utilidad. Para resolver el modelo usaremos el método de aproximación cuadrática. Una vez destendencionarizadas las variables, el problema del planificador central para este modelo es:

$$\begin{aligned}
 (P') \quad & \underset{c(t), u(t)}{Max} \quad E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{c(t)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \left[\rho(1+n)(1+\nu)^{(1-\sigma)} \right]^t \\
 & \text{s.a.} \\
 c(t) + k(t) &= \frac{\theta_1(t) k(t-1)^\beta (u(t) h(t-1))^{1-\beta}}{(1+n)(1+\nu)} + \frac{(1-\pi_1) k(t-1)}{(1+n)(1+\nu)} \quad (3.1) \\
 h(t) &= \frac{\delta h(t-1)(1-u(t))}{(1+\nu)} + \frac{(1-\pi_2) h(t-1)}{(1+\nu)} \quad (3.2) \\
 \log \theta_1(t) &= \gamma_1 \log \theta_1(t-1) + \varepsilon_1(t) \quad \text{donde} \quad \varepsilon_1(t) \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_1}^2) \quad (3.3) \\
 k(t) &\geq 0, \quad h(t) \geq 0, \quad c(t) \geq 0 \\
 1 &\geq u(t) \geq 0 \\
 k_0, \quad h_0, \quad N_0 &\text{ dados}
 \end{aligned}$$

El problema (P') se puede expresar como un problema de programación dinámica, para lo cual eliminamos la variable de decisión $u(t)$ sustituyendo la restricción (3.1) en (3.2) y despejamos el consumo de esta última:

$$c(t) = \frac{\theta_1(t)k(t-1)^\beta}{(1+n)(1+\nu)} \left[\left(\frac{\delta+1-\pi_2}{\delta} \right) h(t-1) - \left(\frac{1+\nu}{\delta} \right) h(t) \right]^{1-\beta} + \frac{(1-\pi_1)k(t-1)}{(1+n)(1+\nu)} - k(t) \quad (3.4)$$

De esta manera la función de utilidad queda expresada en función de las tres variables de estado del problema: los dos capitales en el período anterior, $h(t)$ y $k(t)$, y el shock sobre la tecnología del bien físico, $\theta_1(t)$; y de las dos variables de decisión, $h(t)$ y $k(t)$ que están determinadas implícitamente por las decisiones de trabajo y consumo de los agentes:

$$V(k(t-1), h(t-1), \theta_1(t)) = \max_{k(t), h(t) \in A(k(t-1), h(t-1), \theta_1(t))} \left\{ \begin{array}{l} U(\theta_1(t), k(t), h(t), k(t-1), h(t-1)) + \\ \rho(1+n)(1+\nu)^{1-\sigma} E_t V(k(t), h(t), \theta_1(t+1)) \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

donde el shock tecnológico $\theta_1(t)$ sigue el proceso autorregresivo descrito en la ecuación (3.3). La factibilidad del par de variables de decisión $(k(t), h(t))$ viene determinada por la restricción de positividad de las fracciones de tiempo invertidas en ambos sectores $u(t) \in [0, 1]$ y la no negatividad del consumo, determinado por la ecuación (3.4). Formalizando:

$$A(k(t-1), h(t-1), \theta_1(t)) = \left\{ \begin{array}{l} (k(t), h(t)): \left[1 + \frac{1-\pi_2}{\delta} - \frac{(1+\nu)h(t)}{\delta h(t-1)} \right] \in [0, 1] \quad \wedge \\ c(\theta_1(t), k(t), k(t-1), h(t), h(t-1)) \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dada la concavidad de la función de utilidad y la convexidad de las restricciones tecnológicas, la función de valor $V(k(t-1), h(t-1), \theta_1(t))$ es globalmente cóncava, y

constituye el único punto fijo de la contracción de módulo $\rho(1+n)(1+\nu)^{1-\sigma}$ definida por la ecuación (3.5). Es indispensable por tanto que el modelo satisfaga la condición de transversalidad $\rho(1+n)(1+\nu)^{1-\sigma} < 1$ para garantizar la existencia de la solución.

Para resolver el modelo por el método de aproximación cuadrático-lineal, nos centraremos primeramente en caracterizar el estado estacionario determinístico del modelo destendenciarizado (P'). Del principio del máximo, las ecuaciones que determinan el equilibrio para la versión determinística son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial c(t)} \frac{\partial c(t)}{\partial k(t)} &= -\left\{\rho(1+n)(1+\nu)^{1-\sigma}\right\} \frac{\partial U}{\partial c(t+1)} \frac{\partial c(t+1)}{\partial k(t)} \\ \frac{\partial U}{\partial c(t)} \frac{\partial c(t)}{\partial h(t)} &= -\left\{\rho(1+n)(1+\nu)^{1-\sigma}\right\} \frac{\partial U}{\partial c(t+1)} \frac{\partial c(t+1)}{\partial h(t)}\end{aligned}$$

El equilibrio debe además satisfacer las restricciones de factibilidad (3.1) y (3.2). Los valores de estado estacionario de la versión determinística del modelo pueden obtenerse de las ecuaciones descritas:

$$\begin{aligned}(1+\nu) &= [\rho(1+n)(1+\delta-\pi_2)]^{\frac{1}{\sigma}} \\ u^* &= 1 - \frac{\pi_2 + \nu}{\delta} \\ \left(\frac{k}{uh}\right)^* &= (1+n) \left[\frac{(1+\nu)^\sigma - \rho(1-\pi_1)}{\rho\beta} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} \\ \left(\frac{c}{k}\right)^* &= \left(\frac{1}{(1+n)(1+\nu)} \right) \left(\frac{k}{uh}\right)^{*\beta-1} + \left(\frac{1-\pi_1}{(1+n)(1+\nu)} \right) - 1\end{aligned}$$

En el problema del planificador central del modelo transformado (P') la utilidad se puede expresar en función de los stocks de ambos capitales en el período anterior y el



shock tecnológico (las variables de estado $y(t-1) = (k(t-1), h(t-1), \theta_1(t))$), y la inversión bruta en ambos sectores (las variables de decisión $z(t) = (i_k(t), i_h(t))$):

$$\text{Max}_{i_k(t), i_h(t)} E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{c(k(t-1), h(t-1), \theta_1(t), i_k(t), i_h(t))^{1-\sigma}}{1-\sigma} \left[\rho(1+n)(1+\nu)^{(1-\sigma)} \right]^t$$

donde

$$c(t) = \frac{\theta_1(t)k(t-1)^\beta}{(1+n)(1+\nu)} \left(h(t-1) - \frac{(1+\nu)i_h(t)}{\delta} \right)^{1-\beta} - i_k(t)$$

sujeto a las siguientes restricciones lineales:

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{(1-\pi_1)}{(1+n)(1+\nu)} k(t-1) + i_k(t) \\ h(t) &= \frac{(1-\pi_2)}{(1+\nu)} h(t-1) + i_h(t) \end{aligned}$$

$$\log(\theta_1(t+1)) = \gamma_1 \log(\theta_1(t)) + \varepsilon_1(t+1) \quad \varepsilon_1(t+1) \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_1}^2)$$

La función de utilidad puede ser aproximada alrededor del estado estacionario determinístico por una expansión de Taylor de segundo orden, con el objeto de obtener la siguiente formulación cuadrático-lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Max}_{z(t)} E_0 \sum_{t=1}^{\infty} [y(t-1), z(t)] P[y(t-1), z(t)]' \\ &\text{s.a.:} \\ &y(t) = Qy(t-1) + Rz(t) + S\varepsilon(t+1) \end{aligned}$$

La solución cerrada de un problema cuadrático-lineal implica funciones de política lineales y el método usado para determinar las ecuaciones es conocido y estándar en la literatura [véase McGrattan(1990)].

En la calibración del modelo se siguieron consideraciones relativamente estándar en la literatura de C.E.R. Para reproducir los datos trimestrales de la economía de los Estados Unidos, el descuento futuro y la participación del capital físico en el primer sector se fijaron en $\rho = 0.99$ y $\beta = 0.36$ respectivamente. La depreciación del capital físico se fijó en $\pi_1 = 0.019$, correspondiente a una depreciación anual aproximada de 8%, para que la proporción entre el capital y la producción anual reproduzca las proporciones de la economía de los Estados Unidos, $\left(\frac{k}{y}\right) = 2.5$. Se tomó un valor del inverso de la elasticidad intertemporal del consumo de $\sigma = 2$. En algunos trabajos de CER se considera una función de utilidad logarítmica ($\sigma = 1$). En este estudio se realizaron simulaciones de la economía para distintos valores de σ entre 1 y 4. Sin embargo, es bien conocido en la literatura de CER que las variaciones de σ dentro de estos rangos no afectan de manera significativa el comportamiento de las distintas variables económicas. La diversa literatura referente a estudios empíricos de capital humano estima la tasa de depreciación anual del mismo a lo largo de un amplio rango que va del 3.3% al 13% [Johnson (1970), Johnson & Hebein (1974), Heckman (1976), Haley (1976) y Rosen (1976)]. Tomamos un valor de $\pi_2 = 0.008$ que se corresponde con una tasa de depreciación anual del 3.3%. Finalmente, siguiendo a Lucas (1990), tomamos la tasa de crecimiento trimestral de la población en $n = 0.0035$ para obtener una tasa de crecimiento anual de 1.4%, y el parámetro de productividad de la tecnología del capital humano se tomó en $\delta = 0.022$, para obtener un crecimiento anual de la economía en el largo plazo de 1.5% en términos per cápita. Estas tasas concuerdan con la evidencia empírica registrada en los Estados Unidos de América en la postguerra. Respecto del shock tecnológico, el supuesto usado en la literatura asume un grado de permanencia del shock correspondiente a $\gamma_1 = 0.95$, y una distribución de $\varepsilon_1(t)$ normal con desviación estándar $\sigma_{\varepsilon 1} = 0.007$.

Los valores de estado estacionario de la economía descrita son: $\nu=0.037$, $u^*=0.469$, $\left(\frac{k}{h}\right)^*=16.7881$, $\left(\frac{c}{h}\right)^*=1.2556$

Los resultados se presentan en la tercera columna de la tabla 1. Todos los valores corresponden a la media de los estadísticos, calculados para veinte simulaciones, cada una

de 200 observaciones. Las series fueron filtradas eliminando la tendencia con el método de Hodrick-Prescott antes del cálculo de los estadísticos. El mismo procedimiento se usó con los datos trimestrales disponibles para la economía de los Estados Unidos de América.

El modelo sin ocio no contempla la posibilidad de sustitución intertemporal de las asignaciones de tiempo, ya que en cada período la dotación unitaria se asigna exclusivamente a las actividades productivas en los dos sectores. No obstante, el shock tecnológico en el sector de capital físico origina variaciones en la productividad relativa entre ambos sectores, y como consecuencia, la sustitución intersectorial resultante es capaz de reproducir economías con un comportamiento similar al del modelo estándar de CER.

Las series originadas presentan la misma limitación del modelo estándar de CER para reproducir el comportamiento de las variables en el mercado de trabajo, ya que la correlación horas trabajadas-productividad sigue siendo significativamente positiva (0.876). Sin embargo, la volatilidad general del modelo es algo superior a la del modelo estándar de CER, y las horas fluctúan mucho más. En las generalizaciones contempladas en los siguientes apartados, el comportamiento de las variables relativas al mercado de trabajo mejorará considerablemente.

4. Ocio en la Función de Utilidad

En esta sección estudiamos las versiones estocásticas del modelo de crecimiento endógeno con dos sectores y ocio en la función de utilidad, recientemente estudiado por Ladrón de Guevara *et al.* (1995). Tal como se estudió en el marco general del modelo, se incluye un tercer uso del tiempo. Los agentes pueden asignar su dotación unitaria de tiempo a tres distintas actividades: trabajo, estudio y ocio. Las variables de decisión y estado se incrementan al extender el modelo de la sección anterior. La función de utilidad de un período en el problema (P') de la sección 2 se expresó en función de las variables de estado $(k(t-1), h(t-1), \theta_1(t), \theta_2(t))$ y las variables de decisión $(i_k(t), i_h(t), \ell(t))$:

$$U(c(t), \ell(t)) = \frac{\left\{ \left[\frac{\theta_1(t)k(t-1)^\beta}{(1+n)(1+\nu)} \left((1-\ell(t))h(t-1) - \left(\frac{(1+\nu)i_h(t)}{\theta_2(t)\delta} \right) \right)^{1-\beta} - i_k(t) \right]^\alpha \ell(t)^{1-\alpha} \right\}^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

Haciendo uso de las condiciones de primer orden en contexto determinístico e imponiendo estacionariedad podemos obtener los valores de la senda de crecimiento equilibrado. Como muestran Ladrón de Guevara *et al.* (1995) para una versión determinística del modelo en tiempo continuo, estas ecuaciones permiten la existencia de múltiples estados estacionarios. Bajo ciertas condiciones de los parámetros se obtienen dos estados estacionarios interiores y un tercer estado estacionario frontera sin inversión en capital humano. Sin embargo, en todas las simulaciones realizadas la parametrización del modelo cumplía las condiciones de existencia y unicidad del estado estacionario.

En una primera extensión se consideró solamente un shock sobre la función de producción del bien físico. Los parámetros σ , ρ , n y β usados, así como el proceso tecnológico se mantuvieron iguales que en la sección anterior. Nuevamente, la tasa de depreciación en el primer sector ($\pi_1=0.019$) se fijó para obtener una proporción de capital físico a producto de 2.5. Respecto de la función de utilidad de un período, la participación del

consumo se fijó en $\alpha = 0.4$, para obtener un nivel de trabajo de estado estacionario de $u^* = 0.25$. Como en la sección anterior, el parámetro tecnológico para la función de producción de capital humano ($\delta = 0.04$) se fijó para obtener una tasa de crecimiento endógeno $\nu = 0.0037$, correspondiente a una tasa de crecimiento anual de la economía del 1.5%. Los valores de estado estacionario restantes son: $\ell^* = 0.450$, $\left(\frac{k}{h}\right)^* = 9.235$, $\left(\frac{c}{h}\right)^* = 0.691$. Los resultados de las simulaciones se muestran en la cuarta columna de la tabla 1. Esta extensión incluye ocio en la función de utilidad, por lo que anida al modelo estándar de CER como un caso particular sin inversión en capital humano. La posibilidad de sustituir las asignaciones de tiempo entre ambos sectores dependiendo de las productividades relativas origina un incremento significativo de la volatilidad global del modelo, así como un incremento sustancial de la elasticidad de la oferta de trabajo de corto plazo. Ambos resultados mejoran significativamente el comportamiento del modelo para reproducir los hechos estilizados. Sin embargo, como era de esperar, la correlación entre horas trabajadas y productividad sigue siendo positiva y significativamente alta, ya que como se comentó en la introducción, los shocks sobre la función de producción de capital físico afectan básicamente a la demanda de trabajo.

En la segunda extensión del modelo se incluyó el segundo shock sobre la función de producción de capital humano. En ausencia de evidencia respecto de la tecnología de capital humano suponemos que el shock sigue un proceso similar al del primer sector, y que el parámetro que rige la persistencia de este segundo shock en el tiempo es el mismo: $\log(\theta_2(t)) = 0.95 \log(\theta_2(t-1)) + \varepsilon_2(t)$. Asumimos además que ambas perturbaciones están incorreladas ($\text{corr}(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) = 0$). Se realizaron diversas simulaciones con valores de $\sigma_{\varepsilon_2}^2$ entre 0 y el valor de la varianza en el sector de capital físico. Es conveniente resaltar que el valor de este parámetro afecta básicamente a la magnitud de los desplazamientos de la oferta de trabajo y por tanto a la correlación horas-productividad. Un incremento en la volatilidad del segundo shock originará mayores desplazamientos de la oferta de trabajo y por tanto una correlación negativa entre horas trabajadas y productividad. En la quinta columna de la tabla 1 se ilustran los resultados con $\sigma_{\varepsilon_2} = 0.005$, que se corresponde

con una volatilidad del shock tecnológico del capital humano de alrededor de un 70% de la volatilidad del shock tecnológico del capital físico, con lo que se logran realizaciones de la economía en las que las horas trabajadas y la productividad de las mismas están prácticamente incorreladas.

5. Análisis de Resultados

En esta sección comparamos los principales estadísticos obtenidos de las simulaciones de todas las versiones del modelo de dos sectores descritas en las secciones anteriores con los estadísticos obtenidos tanto de los datos de la economía de los Estados Unidos de América para el período 1947:1-1991:3 como del modelo estándar de CER. Los estadísticos analizados son la volatilidad absoluta del producto (desviación porcentual respecto de la tendencia), las volatilidades relativas de las demás variables respecto del producto, y las correlaciones.

En el contexto del modelo de Uzawa-Lucas la asignación de tiempo se comparte entre los dos sectores y los agentes derivan utilidad exclusivamente del consumo. En cualquier período las asignaciones óptimas de tiempo implican que la proporción de las productividades marginales entre ambos sectores se iguala a la proporción entre los precios sombra de ambos capitales. Esta condición asegura una sustitución intersectorial del tiempo asignado, a pesar de no existir un efecto intertemporal, ya que el ocio no se considera en esta primera versión. En resumen, la volatilidad en el sector de capital físico se origina por las diferencias de productividad entre ambos sectores. Si comparamos los resultados de la versión estocástica del modelo de Uzawa-Lucas con el modelo estándar de CER la sustitución entre los dos sectores es capaz de originar series temporales con un comportamiento similar. Concretamente en un aspecto relevante el comportamiento del modelo logra reproducir el de los datos de manera más apropiada: la volatilidad relativa de las horas trabajadas respecto del producto se incrementa de 0.49 en el modelo estándar a 0.65 en el de Uzawa-Lucas. Este incremento, aunado al hecho de que la volatilidad global del modelo se incrementa de 1.25 a 1.45, origina una notable mejoría en el comportamiento del mercado de trabajo, ya que la volatilidad absoluta de las horas trabajadas se incrementa de 0.616 a 0.947 (Los datos de la economía de los Estados Unidos de América

presentan una volatilidad absoluta de las horas trabajadas de 1.496). La elasticidad de corto plazo de la oferta de trabajo, determinada por la volatilidad de las horas trabajadas relativa a la de los salarios se incrementó de 0.949 a 1.647. El efecto que tiene dicho incremento en la elasticidad de la oferta de trabajo se ilustra en la figura 1, donde las nubes de puntos permiten intuir la oferta de trabajo en los modelos antes descritos. Sin embargo, la correlación entre horas trabajadas y productividad de las mismas solamente se reduce de 0.955 a 0.876. Como se comentó en la introducción, este resultado es previsible en cualquier modelo en el que la única fuente de perturbaciones afecta al sector del bien físico.

En las extensiones que incluyen ocio como un tercer uso del tiempo, la posibilidad de sustituir entre ocio y consumo en un mismo período, así como entre ocio presente y ocio futuro incrementa la volatilidad global del modelo, de 1.448 a 1.529. La sustitución intertemporal del ocio también genera un ligero incremento en la volatilidad relativa de las horas trabajadas, aún cuando dicho resultado no difiere considerablemente del modelo de dos sectores sin ocio. En un modelo en el que los agentes asignan su dotación a tres actividades: trabajo, estudio y ocio, la mayor parte de la sustitución entre tareas ocurre entre el trabajo y el estudio. Cuando los shocks de productividad son altos, los individuos sustituyen primordialmente estudio por trabajo, y en los períodos recesivos invierten en capital humano debido al incremento de la productividad relativa en dicho sector. El ocio no fluctúa considerablemente si lo comparamos con el modelo estándar de un solo sector. La volatilidad relativa del ocio respecto de la producción se ha reducido de 0.211 en el modelo estándar de CER a 0.058 en el modelo de dos sectores.

A diferencia del modelo de un solo sector, en el modelo con dos sectores la alta volatilidad de las horas trabajadas no necesariamente implica una alta volatilidad del ocio. En períodos recesivos, dada la baja productividad de las horas trabajadas, los agentes pueden escoger asignar tiempo disponible a actividades, en este caso el estudio, que en un futuro le reporten mejoras en el nivel de capital humano, y por tanto en la productividad de las horas trabajadas, con el consecuente incremento del bienestar, sin necesidad de incremen-

tar de manera significativa el grado de ocio. La volatilidad del ocio dependerá entonces del grado de sustitución intertemporal del mismo, y fluctuará independientemente del nivel de trabajo asignado en cada período. Este comportamiento es bastante intuitivo, y se presenta de igual manera en modelos con un segundo sector de producción en los hogares, [ver Benhabib, Rogerson y Wright (1991) y Hansen y Wright (1992)].

A pesar del incremento sustancial en las volatilidades, el modelo con dos sectores y un shock sigue presentando una alta correlación entre horas trabajadas y productividad (0.818). Al igual que en el modelo de un solo sector, la oferta de trabajo de corto plazo permanece casi invariante ante los shocks de productividad en el sector del bien físico. En este sentido, la segunda fuente de fluctuaciones en el sector educativo considerada en la sección 4 origina continuos desplazamientos de la oferta de trabajo, y permite una reducción apropiada de la correlación entre horas y salarios. En cuanto al comportamiento de los usos del tiempo, el mismo no difiere significativamente respecto del modelo con un único shock. Los agentes sustituyen básicamente entre los dos sectores, y las asignaciones de ocio fluctúan relativamente menos que el estudio y el trabajo. Sin embargo, en el modelo con dos shocks las horas trabajadas y los salarios están básicamente incorrelados. De hecho, esta extensión reproduce los hechos estilizados que presentan los datos de la economía de los Estados Unidos de América respecto de las volatilidades y correlaciones en el mercado de trabajo.

Estos resultados se ilustran claramente en la figura 1. La primera gráfica, 1a, muestra los datos trimestrales de la Economía de los Estados Unidos de América para el período 1955-1988. Las gráficas restantes muestran las contribuciones de las sucesivas generalizaciones del modelo estándar de CER consideradas en este trabajo, para reproducir tanto las volatilidades como las correlaciones entre horas trabajadas y productividad. La figura 1b muestra el comportamiento de las variables relativas al mercado de trabajo, horas trabajadas y productividad de las mismas, para el modelo estándar de CER. Se observa claramente cómo las realizaciones reproducen la curva de oferta de trabajo, que se mantiene prácticamente estática ante desplazamientos de la curva de demanda de tra-

bajo, como consecuencia de los shocks sobre la productividad. En la figura 1c se incluye el segundo sector: la posibilidad de sustitución intersectorial incrementa sustancialmente la volatilidad global del modelo. La curva de oferta de trabajo de corto plazo se vuelve más elástica y las horas trabajadas fluctúan de manera considerable. En la figura 1d, al incluir la segunda fuente de perturbaciones, se incrementa aún más la volatilidad del modelo y se obtienen desplazamientos independientes de las curvas de oferta y demanda de trabajo, con lo cual el modelo predice incorrelación entre horas trabajadas y salarios, adecuándose al comportamiento de los datos.

Estadíst.	Datos Postguerra ²	Modelo 1 sector	Dos sect. (Sin ocio)	Dos sect. (con ocio) 1 shock	Dos sect. (con ocio) 2 shocks
σ_y	1.74-1.92	1.249	1.448	1.529	1.675
σ_k/σ_y	0.38	0.222	0.244	0.251	0.336
σ_c/σ_y	0.45-0.49	0.328	0.260	0.311	0.305
σ_{ik}/σ_y	2.78-3.16	2.664	3.251	3.106	3.209
σ_u/σ_y	0.78-0.86	0.493	0.654	0.671	0.877
σ_w/σ_y	0.45-0.70	0.519	0.397	0.367	0.371
σ_ℓ/σ_y	-	0.211	-	0.058	0.194
σ_{est}/σ_y	-	-	0.573	0.515	0.972
σ_u/σ_w	1.67-2.15	0.949	1.647	1.825	2.172
$corr(u, w)$	-0.30-0.10	0.955	0.876	0.818	-0.056
$corr(c, y)$	0.71-0.76	0.938	0.954	0.919	0.799
$corr(ik, y)$	0.73-0.96	0.994	0.996	0.991	0.986
$corr(k, y)$	0.28	0.361	0.378	0.349	0.329
$corr(u, y)$	0.74-0.90	0.988	0.983	0.976	0.930
$corr(w, y)$	0.34-0.63	0.989	0.950	0.924	0.497
$corr(est, y)$	-	-	-0.983	-0.954	-0.820

Tabla 1: Volatilidades y correlaciones obtenidas para los distintos modelos estudiados.

⁴Los estadísticos presentados son los promedios de 20 simulaciones de 200 datos cada una. Las series obtenidas han sido previamente transformadas en logaritmos y destendenciarizadas usando el filtro de Hodrick y Prescott. Las desviaciones respecto de la tendencia han sido expresadas en porcentaje, lo que se denomina en la literatura como volatilidad. Los estadísticos de los datos corresponden a las series de Producto Nacional Bruto, consumo e inversión se han obtenido de la base de datos "Citicorp's Citibase". Las series de horas provienen de las encuestas de hogares y encuestas de establecimientos de dicha base de datos. [Ver Hansen y Wright (1992) para una explicación detallada de los datos].

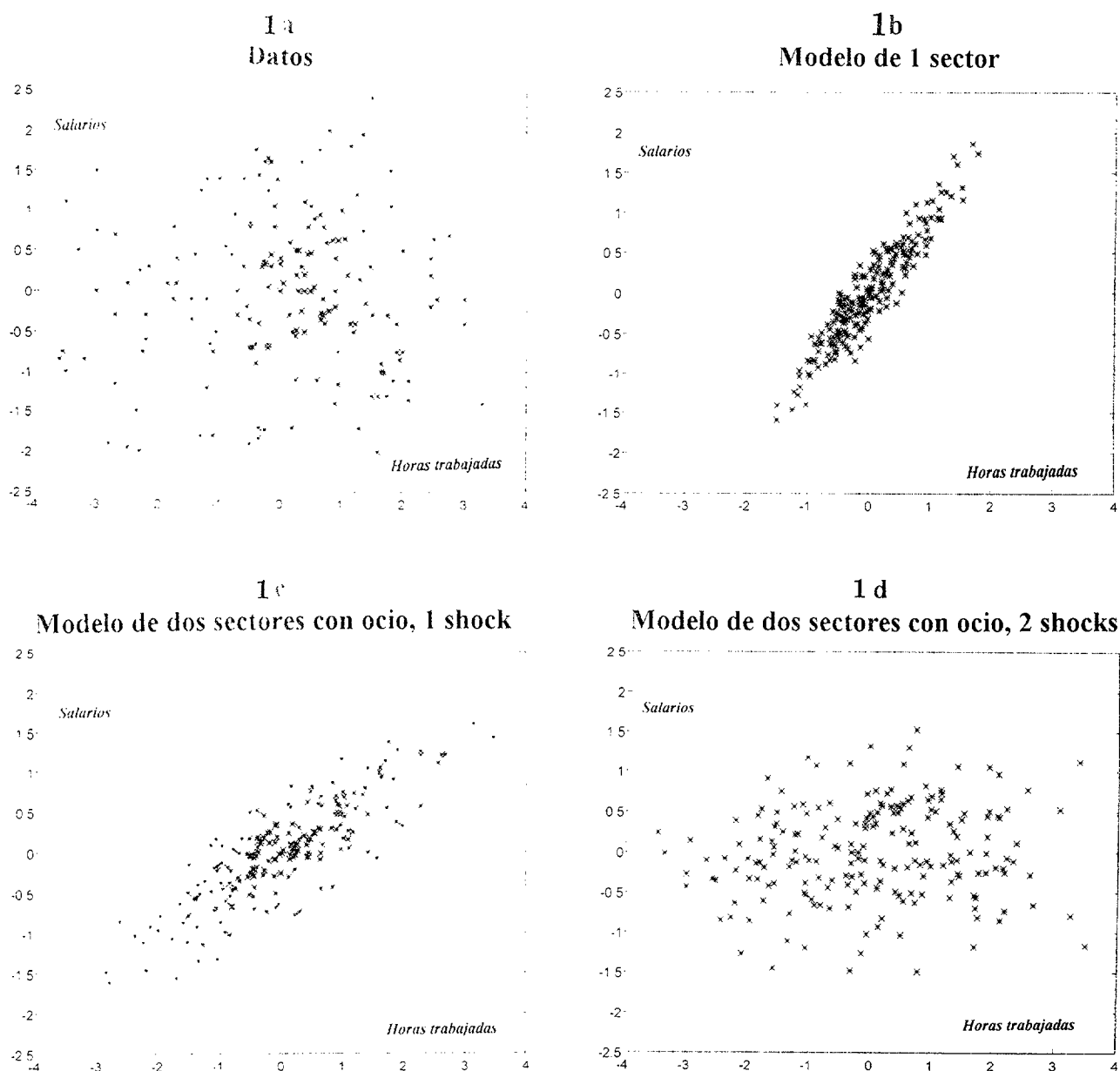


Figura 2.- Horas trabajadas y productividad para los datos trimestrales de la economía de los Estados Unidos de América y para distintos modelos de C.E.R.:

Referencias

- [1] Benhabib, J., R. Rogerson y R. Wright (1991), "Homework in Macroeconomics: Household Production and Aggregate Fluctuations," *Journal of Political Economy* 99, N° 6, págs. 1166-1187.
- [2] Boldrin, M. y M. Horvart (1995), "Labor Contracts and Business Cycles," *Journal of Political Economy* 103, págs. 972-1004.
- [3] Bond, E., P. Wang, y C.Yip (1996), "A General Two-Sector Model of Endogenous Growth with Human and Physical Capital: Balanced Growth and Transitional Dynamics," *Journal of Economic Theory* 68, págs. 149-173.
- [4] Caballé, J. y M. Santos (1993), "On Endogenous Growth with Physical and Human Capital," *Journal of Political Economy* 101, págs. 1042-1068.
- [5] Chamley, C. (1993), "Externalities and Dynamics in Models of Learning by Doing," *International Economic Review* 34, págs. 583-609.
- [6] Christiano, L. (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by Linear-Quadratic Approximation and by Value-Function Iteration," *Journal of Business & Economic Statistics* 8, págs. 23-26.
- [7] Christiano, L. y M. Eichenbaum (1992), "Current Real-Business-Cycle Theories and Aggregate Labor-Market Fluctuations," *American Economic Review* 82, págs.430-450.
- [8] Haley, W. (1976), "Estimation of the Earnings Profile from Optimal Human Capital Accumulation," *Econometrica* 44, págs. 1223-1238.
- [9] Hansen, G. D. (1985), "Indivisible Labor and the Business Cycle," *Journal of Monetary Economics* 16, págs. 309-327.

- [10] Hansen, G.D. y R. Wright (1992), "The Labor Market in Real Business Cycle Theory," *Federal Reserve Bank of Minneapolis, Quarterly Review*.
- [11] Heckman, J. (1976), "A Life-Cycle Model of Earnings, Learning and Consumption," *Journal of Political Economy* 84, págs. s11-s44.
- [12] Johnson, T. (1970), "Returns from Investment in Human Capital," *American Economic Review* 60, págs. 546-560.
- [13] Johnson, T. y F. Hebein (1974), "Investment in Human Capital and Growth of Personal Income, 1956-1966," *American Economic Review* 64, págs. 604-615.
- [14] Jones L. y R. Manuelli (1994), "Las Fuentes del Crecimiento," *Cuadernos Económicos I.C.E.* 58, págs. 71-106.
- [15] King, R., C. I. Plosser y S. Rebelo (1988), "Production, Growth and Business Cycles: I. The Basic Neoclassical Model," *Journal of Monetary Economics* 21, págs. 309-341.
- [16] Kydland, Finn E. y E. C. Prescott (1982), "Time to Build and Aggregate Fluctuations," *Econometrica* 50, págs. 1345-1370.
- [17] Kydland, Finn E. y E. C. Prescott (1991), "Hours and Employment Variations in Business Cycle Theory," *Economic Theory* 1, págs. 63-81.
- [18] Ladrón de Guevara, A., S. Ortigueira y M. Santos (1995), "A Two-Sector Model of Endogenous Growth with Leisure," *Discussion Paper Series, Centro de Investigación Económica, Instituto Tecnológico Autónomo de México*. N° 9503, Agosto 1995.
- [19] Lucas, Robert E. Jr. (1988), "On the Mechanics of Economic Development," *Journal of Monetary Economics* 22, págs. 3-42.
- [20] McGrattan, E. (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by Linear-Quadratic Approximation," *Journal of Business & Economic Statistics* 8, págs. 41-44.

- [21] Prescott, Edward C. (1986), "Theory ahead of Business Cycle Measurement," *Fed. Reserve Bank of Minneapolis Q. Rev.* 10, págs. 9-22.
- [22] Rosen, S. (1976), "A Theory of Life Earnings," *Journal of Political Economy* 84, págs. s45-s67.
- [23] Uzawa, H. (1965), "Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth," *International Economic Review* 6, págs. 18-31.